TEORICA DELLE FORZE

CHE AGISCONO

SECONDO LA LEGGE DI NEWTON

E SUA APPLICAZIONE ALLA ELETTRICITÀ STATICA

DEL PROFESSORE

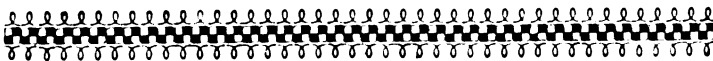
ENRICO BETTI

Estratta dal Nuovo Cimento Vol. XVIII. XIX. XX.

PISA

TIPOGRAFIA PIERACCINI

1865

I.

Potenziale di un sistema qualunque di elementi materiali.

Le forze che agiscono secondo la legge di Newton sono quelle che emanano da ciascuno degli elementi infinitesimi di una data materia, e che tendono ad avvicinare oppure ad allontanare tra loro questi elementi, in ragione diretta delle loro masse e in ragione inversa dei quadrati delle loro distanze. Le prime sono forze attrattive, le seconde ripulsive. Una delle forze attrattive è la gravitazione universale scoperta da *Newton*, e una delle ripulsive è quella che si manifesta fra le elettricità dello stesso nome.

Cominciamo dal determinare l'attrazione o la ripulsione che un aggregato di punti materiali esercita sopra un altro punto materiale qualunque.

Siano M_1, M_2, M_3 ... più punti materiali; μ_1, μ_2, μ_3 ... le loro masse rispettive, ed $(x_1\ y_1\ z_1)$, $(x_2\ y_2\ z_2)$ .... le loro rispettive coordinate ortogonali. Sia O un punto materiale, la cui massa prenderemo per unità, e le di cui coordinate

siano $(a, b, c,)$; e siano $r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_s \ldots$ le distanze rispettive dei punti $M_1\, M_2\, M_3 \ldots$ dal punto O. Avremo:

$$(1) \qquad r_s^2 = (x_s - a)^2 + (y_s - b)^2 + (z_s - c)^2,$$

e l'attrazione esercitata da M_s sarà nella direzione r_s ed eguale a $f\frac{\mu_s}{r_s^2}$, denotando con f la forza attrattiva dell'unità di massa alla distanza 1. Per semplicità faremo $f = 1$; quindi l'azione esercitata dall'aggregato de' punti M_s sopra l'unità di massa in O sarà data dalla espressione:

$$F = \Sigma \frac{\mu_s}{r_s^2}.$$

Denotando con $\alpha_s\ \beta_s\ \gamma_s$ gli angoli di r_s con i tre assi, avremo:

$$\cos \alpha_s = -\frac{dr_s}{da}, \quad \cos \beta_s = -\frac{dr_s}{db}, \quad \cos \gamma_s = -\frac{dr_s}{dc}.$$

Pertanto se indichiamo con X Y Z le componenti della forza F secondo i tre assi avremo:

$$X = -\Sigma \frac{\mu_s}{r_s^2}\frac{dr_s}{da}, \quad Y = -\Sigma \frac{\mu_s}{r_s^2}\frac{dr_s}{db}, \quad Z = -\Sigma \frac{\mu_s}{r_s^2}\frac{dr_s}{db}$$

oppure:

$$X = \Sigma \frac{d}{da}\frac{\mu_s}{r_s}, \quad Y = \Sigma \frac{d}{db}\frac{\mu_s}{r_s}, \quad Z = \Sigma \frac{d}{dc}\frac{\mu_s}{r_s}$$

e facendo:

$$(2) \qquad P = \Sigma \frac{\mu_s}{r_s},$$

avremo:

$$(3) \qquad X = \frac{dP}{da}, \qquad Y = \frac{dP}{db}, \qquad Z = \frac{dP}{dc},$$

La funzione P delle coordinate del punto attratto (a, b, c) dipende dalla posizione e dalla massa dei punti M_s, e da lei sola dipende la determinazione dell' attrazione; perciò ad essa è stato da *Gauss* dato il nome di *potenziale* e da *Green* è stata chiamata *funzione potenziale.* Se i punti M_s appartengono ad uno spazio continuo il segno sommatorio diventa un integrale triplo, le masse μ_s gli elementi materiali, cioè le densità ρ moltiplicate per l' elemento di volume $dx\ dy\ dz$, e l'integrale triplo deve essere esteso a tutta la massa del corpo; avremo dunque in tal caso:

$$(4) \qquad P = \iiint \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r},$$

essendo:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

Se invece delle coordinate rettilinee ortogonali si prendessero le coordinate polari, l' elemento di volume sarebbe espresso da:

$$R^2 \operatorname{sen} \theta\, dR\, d\theta\, d\phi;$$

R essendo il raggio vettore, θ la latitudine, e ϕ la longitudine dell' elemento. Quindi ponendo:

$$a = l \cos A, \quad b = l \operatorname{sen} A \cos B, \quad c = l \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B;$$
$$x = R \cos \theta, \quad y = R \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad z = R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi,$$

e se γ è l' angolo compreso fra R ed l, sarà:

$$r^2 = R^2 + l^2 - 2 R\, l \cos \gamma,$$

e si avrà:

$$(5)\qquad P = \iiint \frac{\rho\, R^2 \operatorname{sen}\theta\, dR\, d\theta\, d\phi}{\sqrt{R^2 + l^2 - 2Rl\cos\gamma}}\ .$$

Se ρ è una funzione finita e continua, ed O è esterno al corpo attraente, P sarà finita e continua in tutto lo spazio esterno a quello a cui si estende l'integrale. Quando O è infinitamente lontano dal corpo attraente, sarà $l = \infty$ e perciò all'infinito il potenziale si annulla.

Dall' equazione (5) si ricava:

$$P\,l = \iiint \frac{\rho\, R^2 \operatorname{sen}\theta\, dR\, d\theta\, d\phi}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2} - 2\frac{R}{l}\cos\gamma}}\ ,$$

e perciò quando $l = \infty$ il prodotto $P\,l$ è eguale alla quantità finita:

$$\iiint \rho\, R^2 \operatorname{sen}\theta\, dR\, d\theta\, d\phi = M,$$

denotando con M la massa del corpo attraente; e inoltre:

$$P\,l \cos A = Pa = M\cos A,\quad P\,l \operatorname{sen} A \cos B = Pb = M \operatorname{sen} A \cos B,$$

$$P\,l \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = Pc = M \operatorname{sen} A \cos B\,.$$

Dunque i prodotti del potenziale per ciascuna delle variabili si mantengono finiti, anche quando queste variabili divengono infinite, e la quantità verso cui converge il prodotto del potenziale per il raggio vettore, quando questo cresce infinitamente, è la massa del corpo attraente.

Derivando la (4) rapporto alle coordinate $a, b, c,$ avremo:

$$\frac{dP}{da} = \iiint \frac{\rho\,(a - x)}{r^3}\, dx\, dy\, dz\ ,$$

$$\frac{dP}{db} = \iiint \frac{\rho(b-y)}{r^3}\, dx\, dy\, dz\,,$$

$$\frac{dP}{dc} = \iiint \frac{\rho(c-z)}{r^3}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Quindi le derivate prime di P si mantengono finite e continue in tutto lo spazio esterno alla massa attraente, perchè r non si annulla mai in tutto il corso della integrazione.

Per $l = \infty$ queste derivate si annullano. Osserviamo ora che si ha:

$$\frac{dP}{da} l^2 = \iiint \rho \frac{\left(\cos A - \frac{R \cos \theta}{l}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{l^2} - 2\frac{R}{l}\cos\gamma\right)^3}} R^2 \operatorname{sen} \theta\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

e quindi, per $l = \infty$, $\frac{dP}{da} l^2$ converge verso una quantità finita. È facile altresì dedurre che anche $\frac{dP}{da} a^2$, $\frac{dP}{db} b^2$, $\frac{dP}{dc} c^2$, per a, b, c infiniti convergono verso quantità finite, e che perciò sono infinitesimi dell' ordine $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$.

Derivando nuovamente e sommando, si ottiene:

$$\frac{d^2 P}{da^2} + \frac{d^2 P}{db^2} + \frac{d^2 P}{dc^2} = o\ ;$$

e denotando per brevità con Δ^2 tale operazione, ossia ponendo:

$$\Delta^2 = \frac{d^2}{da^2} + \frac{d^2}{db^2} + \frac{d^2}{dc^2}$$

avremo il seguente teorema.

Il potenziale e le sue derivate prime sono funzioni delle coordinate del punto attratto finite e continue in tutto lo

spazio esterno alla massa attraente; in questo spazio le derivate seconde sodisfano alla equazione:

$$\Delta^2 P = o,$$

e quando il punto attratto va all'infinito la funzione P si annulla, e il prodotto di essa per le coordinate del punto attratto converge verso una quantità finita, e i prodotti delle sue derivate rapporto alle coordinate del punto attratto moltiplicate per i quadrati di quelle medesime coordinate convergono verso quantità finite.

La espressione $\Delta^2 P$ si può trasformare con le coordinate polari, ponendo:

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi\,, \quad z = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,;$$

r essendo la distanza del punto dall' origine delle coordinate;

θ, l'angolo che r fa con l'asse delle x:

ϕ, l'angolo che il piano che passa per le x fa con un piano fisso. Un calcolo molto facile e notissimo conduce alla equazione:

$$\Delta^2 P = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{d\,r^2\frac{dP}{dr}}{dr} + \frac{d\,\text{sen}\,\theta\,\frac{dP}{d\theta}}{\text{sen}\,\theta\,d\theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\cdot\frac{d^2P}{d\phi^2}\right\}.$$

Tali coordinate polari sono evidentemente i parametri di tre sistemi di superficie ortogonali: sfere concentriche, coni retti col centro comune alle due sfere, e piani che passano per una retta che passa per il detto centro.

Denotando in generale con ρ, μ, ν i parametri di tre sistemi di superficie ortogonali, le componenti secondo i tre assi si otterranno dalle equazioni:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{d\rho}\,\frac{d\rho}{dx} + \frac{dP}{d\mu}\,\frac{d\mu}{dx} + \frac{dP}{d\nu}\cdot\frac{d\nu}{dx}$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{dy} + \ldots\ldots$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{dz} + \ldots\ldots$$

Le componenti secondo le normali alle tre superficie ortogonali si otterranno moltiplicando queste ultime per i coseni degli angoli che fanno le normali stesse coi rispettivi assi e sommando. Chiamandole R, M, N e ponendo:

$$h_1^2 = \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 ,$$

$$h_2^2 = \left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \ldots\ldots,$$

$$h_3^2 = \left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 + \ldots\ldots,$$

avremo:

$$R = \frac{1}{h_1}\frac{dP}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{h_1}\frac{dP}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{1}{h_1}\frac{dP}{dz}\frac{d\rho}{dz}$$

$$M = \frac{1}{h_2}\frac{dP}{dx}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{h_2}\frac{dP}{dy}\frac{d\mu}{dy} + \ldots\ldots$$

$$N = \frac{1}{h_3}\frac{dP}{dx}\frac{d\nu}{dx} + \frac{1}{h_3}\frac{dP}{dy}\frac{d\nu}{dy} + \ldots\ldots$$

Sostituendovi i valori precedenti ed osservando che le superficie sono ortogonali, si ottiene:

$$R = h_1\frac{dP}{d\rho} \quad , \quad M = h_2\frac{dP}{d\mu} \quad , \quad N = h_3\frac{dP}{d\nu} .$$

Per le coordinate polari abbiamo:

$$R = \frac{dP}{dr} \quad , \quad M = \frac{dP}{r\,d\theta} \quad , \quad N = \frac{dP}{r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi} .$$

La prima è la componente secondo il raggio vettore, la seconda è nella direzione della tangente alla sfera secondo un meridiano, la terza pure tangente alla sfera ma normale al meridiano.

II.

Potenziale di una massa omogenea compresa tra due sfere concentriche.

Abbiasi una massa di densità ρ costante compresa fra due superficie sferiche concentriche, di raggio R l' esterna e di raggio R_0 l' interna: siano r, θ, φ le coordinate polari del punto attratto O, e il polo od origine delle coordinate sia nel centro delle sfere; r', θ', φ' siano le coordinate polari di un punto qualunque della massa. Per ragion di simmetria è chiaro che il potenziale avrà lo stesso valore per tutti i punti alla stessa distanza dal centro delle sfere; quindi il potenziale P sarà una funzione della sola r e l' equazione $\Delta^2 P = o$ darà:

$$\frac{d\, r^2 \dfrac{dP}{dr}}{dr} = o \,,$$

e integrando avremo:

$$P = \frac{c}{r} + c' \,.$$

Per i punti esterni ad ambedue le sfere il potenziale deve essere una funzione finita e continua che si annulla per $r = \infty$. Quindi per questi punti avremo $c' = o$ e denotando con P_e il potenziale relativo a un punto esterno e, sarà:

$$P_e = \frac{c}{r} \,.$$

Per i punti e' interni ad ambedue le sfere il potenziale P_e' deve esser sempre finito anche per $r = o$, quindi dovrà essere $c = o$ e avremo:

$$P_e' = c'.$$

Onde nei punti interni ad ambedue le sfere il potenziale è costante, e le sue derivate sono nulle, e perciò le componenti dell'azione attrattiva sono nulle in questi punti.

Nel centro delle due sfere abbiamo, $x, y, z = o$, quindi:

$$(P_e')_0 = c' = \rho \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r} = \rho \int_{R_0}^{R} r'dr' \int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'$$

$$= 2\pi\rho (R_1^2 - R_0^2)$$

$$(1) \qquad P_e' = 2\pi\rho (R_1^2 - R_0^2)$$

Per $r = \infty$, deve essere per quello che abbiamo dimostrato nel §. I:

$$Pr = M = \frac{4\pi}{3} \rho (R^3 - R_0^3) = c;$$

onde:

$$c = \frac{4\pi\rho}{3} (R^3 - R_0^3);$$

$$(2) \qquad P_e = \frac{4\pi\rho}{3r} (R^3 - R_1^3) = \frac{M}{r},$$

indicando con M la massa dell'involucro.

Per determinare il potenziale per un punto i che fa parte dell'involucro sferico, osserviamo che P_i è la somma di due potenziali, cioè del potenziale dell'involucro limitato dalle

sfere di raggio R ed r, e del potenziale dell'involucro limitato dalle sfere di raggio r ed R_0. Il primo di quei potenziali è:

$$2\pi\rho(R^2 - r^2);$$

e il secondo:

$$\frac{4\pi\rho}{3r}(r^3 - R_0^3);$$

dunque sarà:

$$P_i = 2\pi\rho R^2 - 2\rho\frac{\pi}{3}r^2 - \frac{4\pi\rho R_0^3}{3r}. \tag{3}$$

Per avere il potenziale di una sfera basterà porre $R_0 = o$ e avremo:

$$P_e = \frac{4\pi\rho R^3}{3r} = \frac{M}{r}, \tag{4}$$

$$P_i = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2. \tag{5}$$

L'equazioni (2) e (4) danno il seguente teorema. L'azione di un involucro, o di una sfera, sopra un punto esterno, è eguale a quella che eserciterebbe il centro delle due sfere, o della sfera, quando in esso fosse concentrata tutta la massa dell' involucro, o della sfera. Dalla equazione (4) si ricava che l'azione sopra un punto della superficie della sfera è $-\,^4/_3\,\pi\rho R$; dunque l'azione attrattiva esercitata da una sfera sopra un punto della sua superficie è proporzionale al suo raggio. Dalla (5) si rileva che l'azione sopra un suo punto interno è proporzionale alla distanza di questo dal centro, ossia che è la stessa come se non esistesse la massa dell'involucro sferico che lo circonda.

Le tre espressioni del potenziale di un involucro sferico

relativo ai punti esterni ed interni all'involucro e a quelli che ne fanno parte, si continuano senza interruzione l'una nell'altra e formano una sola funzione continua. Infatti abbiamo:

per $r = R$,
$$P_e = \frac{4\pi\rho R^2}{3} - \frac{4}{3}\frac{\pi\rho R_0^3}{R},$$

$$P_i = \frac{4\pi\rho R^2}{3} - \frac{4}{3}\frac{\pi\rho R_0^3}{R};$$

per $r = R_0$,
$$P_i = 2\pi\rho(R^2 - R_0^2),$$

$$P_e' = 2\pi\rho(R^2 - R_0^2).$$

Lo stesso accade delle tre derivate rapporto ad r delle tre espressioni del potenziale; e lo stesso avrà luogo per le derivate rapporto ad x, y, z che si ottengono dalle precedenti moltiplicandole per $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$.

Le derivate seconde delle tre espressioni del potenziale non si continuano una nell'altra, e nel passare dall'esterno all'interno, e viceversa, offrono due salti. Esse sono:

$$\frac{d^2 P_e}{dr^2} = \frac{8\pi\rho}{3r^3}(R^3 - R_0^3),$$

$$\frac{d^2 P_i}{dr^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho - \frac{8\pi\rho R_0^3}{3r^3},$$

$$\frac{d^2 P_e'}{dr^2} = 0,$$

e per $r = R$ si ha:

$$\frac{d^2 P_e}{dr^2} = \frac{8}{3}\pi\rho - \frac{8}{3}\pi\rho\frac{R_0^3}{R^3},$$

$$\frac{d^2 P_i}{dr^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho - \frac{8}{3}\pi\rho\frac{R_0^3}{R^3};$$

e quindi:

$$\frac{d^2 P_e}{dr^2} - \frac{d^2 P_i}{d r^2} = 4 \pi \rho .$$

Per $r = R_0$: $\frac{d^2 P_i}{d r^2} = - 4 \pi \rho , \quad \frac{d^2 P_e'}{d r^2} = o ,$

e quindi:

$$\frac{d^2 P_i}{d r^2} - \frac{d^2 P_e'}{d r^2} = - 4 \pi \rho ;$$

dunque nel passare dall' interno all' esterno dell' involucro sferico le derivate seconde variano bruscamente di $4 \pi \rho$.

Trovammo precedentemente:

$$\Delta^2 P = \frac{1}{r^2} \frac{d r^2 \frac{d P}{d r}}{d r} ,$$

e ponendo invece di P_i il suo valore (3) abbiamo:

$$\Delta^2 P_i = - \frac{\rho \pi}{r^2} \frac{d}{d r} \left(\frac{4}{3} r^3 - \frac{4}{3} R_0^3\right) = - 4 \pi \rho .$$

III.

Caratteristiche del potenziale di uno o più corpi.

Abbiamo veduto nel §. I: che il potenziale P di una massa di forma qualunque, di densità costante o variabile, e le sue derivate prime sono funzioni delle coordinate *a*, *b* e *c* del punto attratto O, le quali si mantengono finite e continue, finchè O rimane nello spazio esterno alla massa. Dimostriamo ora che anche quando il punto è nell' interno o sulla superficie del corpo, si mantengono sempre funzioni

finite e continue. Hanno sempre valori finiti. In fatti prendendo il punto O per polo abbiamo :

$$P = \iiint \rho \, r \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi \, dr \, , \quad \frac{dP}{da} = \iiint \rho \cos\theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi \, dr,$$

$$\frac{dP}{db} = \iiint \rho \operatorname{sen}^2\theta \cos\phi \, d\theta \, d\phi \, dr, \quad \frac{dP}{dc} = \iiint \rho \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\phi \, dr;$$

i quali integrali non divengono infiniti per qualunque valore di r, anche se r passa per zero. Sono funzioni continue. Infatti, consideriamo un punto M di una delle superficie della massa attraente, e conduciamo per M una retta che attraversi la superficie, e sopra di essa dalle due parti prendiamo due punti infinitamente prossimi m ed n egualmente distanti da M, cioè in modo che sia $n\,M = m\,M = \varepsilon$. Sia m l'interno n l' esterno alla massa. Descriviamo col centro in M e col raggio ε una sfera. Il potenziale P_n relativo al punto esterno m sarà uguale al potenziale p_n della porzione di sfera che è occupata dalla massa, più il potenziale P_n' di tutta l'altra massa, cioè avremo $P_n = p_n + P_n'$. Il potenziale P_m relativo ad m sarà eguale al potenziale p_m della porzione di sfera occupata dalla massa più il potenziale P_m' di tutta l'altra massa; cioè avremo : $P_m = p_m + P_m'$. Ora il potenziale di tutta la sfera relativo a un punto della sua superficie è $\frac{4}{3} \pi \rho \varepsilon^2$; quindi $p_n - p_m < \frac{4}{3} \rho \pi \varepsilon^2$, si potrà rendere più piccolo di qualunque data quantità col diminuire ε. Anche $P_n' - P_m'$ può rendersi più piccolo di ogni quantità data col diminuire di ε, o all'avvicinarsi di n ad m; quindi la differenza $P_n - P_m = p_n - p_m + P_n' - P_m'$ potrà rendersi più piccola di qualunque quantità data avvicinando n ad m, dunque i valori di P per i punti esterni variano con continuità nel passare ai punti interni.

Per le derivate abbiamo:

$$\frac{dP_n}{da} - \frac{dP_m}{da} = \frac{dp_n}{da} - \frac{dp_m}{da} + \frac{dP_n'}{da} - \frac{dP_m'}{da}$$

e le derivate $\frac{dp_n}{da}$, $\frac{dP_m}{da}$ sono in valore assoluto minori di $\frac{4}{3}\pi\varepsilon\cos\alpha$, e perciò si conclude come precedentemente che anche i valori delle derivate prime variano con continuità passando dai punti attratti esterni agli interni. Analogamente si dimostra la continuità di P e delle sue derivate prime anche nei punti interni alla massa attraente. Dunque il potenziale P e le sue derivate prime sono funzioni finite e continue in tutto lo spazio.

Se la densità variasse bruscamente attraverso alcune superficie si riguarderebbero le masse limitate da queste superficie come tanti corpi distinti, e si troverebbe che variano con continuità nel passare attraverso ad esse i valori del potenziale e delle sue derivate prime.

Le derivate seconde di P che sono finite in tutto lo spazio esterno al corpo, sono finite anche nell' interno e sulle superficie del medesimo e sono sempre discontinue nel passare dall' esterno all' interno della massa attraente, o da una parte dello spazio ad un' altra nella quale la densità della massa offra una discontinuità. Infatti, quando il punto attratto O è nella massa attraente, imaginiamo una sfera descritta col centro in O e con un raggio piccolissimo ε, e la porzione di massa compresa in questa sfera potrà supporsi di densità costante ed eguale al valore di ρ nel punto O; il potenziale P relativo al punto O sarà eguale alla somma di due potenziali P', e P'', essendo P' il potenziale della piccola sfera, e P'' il potenziale della massa del corpo rispetto alla quale O è esterno. Onde avremo:

$$P = P' + P'',$$

$$\frac{d^2 P}{da^2} = \frac{d^2 P'}{da^2} + \frac{d^2 P''}{da^2} \dots\dots$$

ed essendo nel punto O finite le derivate seconde di P' e P'', avranno valori finiti in questo punto anche le derivate seconde di P. Avremo inoltre:

$$\Delta^2 P = \Delta^2 P' + \Delta^2 P'', \quad \text{ma } \Delta^2 P'' = o, \quad \text{e } \Delta^2 P' = -4\pi\rho$$

onde:

$$\Delta^2 P = - 4 \pi \rho .$$

Dunque la somma delle tre derivate seconde del potenziale: $\frac{d^2 P}{da^2} + \frac{d^2 P}{db^2} + \frac{d^2 P}{dc^2}$ che è nulla se O è esterno, diviene uguale a $- 4 \pi \rho$ se O è interno e quindi nel passaggio dall'esterno all'interno questa somma cambia bruscamente di valore.

Da tutto ciò che abbiamo dimostrato si raccoglie che il potenziale P di una massa di forma qualunque, di densità costante o variabile, ha le seguenti proprietà:

1.° È una funzione delle coordinate del punto attratto, finita e continua in tutto lo spazio; quando il punto attratto è all'infinito s'annulla, e il prodotto della medesima per il raggio vettore del punto attratto rimane sempre una quantità finita;

2.° Le sue derivate prime sono finite e continue in tutto lo spazio; quando il punto attratto è all'infinito s'annullano, ed i prodotti di esse per il quadrato del raggio vettore del punto attratto rimangono sempre quantità finite;

3.° Le sue derivate seconde sono finite in tutto lo spazio, sono continue in tutto lo spazio eccettuate le superficie attraverso le quali la densità è discontinua, e sodisfano alla equazione:

$$\Delta^2 P = - 4 \pi \rho ,$$

dove ρ è la densità della massa nel punto attratto se è interno alla massa stessa, ed è eguale a zero se il punto è esterno.

Queste proprietà sono le caratteristiche del potenziale, cioè lo definiscono compiutamente, e non possono esservi due funzioni che godano delle medesime proprietà e siano differenti.

Questo importante teorema è dovuto a *Dirichlet*.

Prima di passare a dimostrarlo conviene notare che la

espressione: funzione delle coordinate di un punto, o funzione di un punto, è qui usata nel senso più generale; cioè chiamiamo funzione di un punto ogni quantità che ha un valore determinato per ogni posizione del punto stesso senza curarsi se questo valore può determinarsi in tutto lo spazio mediante le stesse operazioni di calcolo effettuate sui valori delle coordinate, oppure se nelle differenti parti dello spazio occorrono differenti serie di operazioni di calcolo, oppure se non si possa dare nessuna serie generale di operazioni di calcolo, mediante la quale se ne ottengono i valori nelle differenti parti dello spazio, cioè non ci curiamo di sapere se vi è una espressione analitica, se ve ne sono più o se non ve n' è alcuna che dia questa funzione. Nell' analisi e nelle applicazioni alla fisica matematica è importante questo concetto.

Supponiamo ora che P e P' siano due funzioni che sodisfino alle tre condizioni sopra esposte. Poniamo:

$$P - P' = V. \tag{1}$$

Avremo per tutti i punti dello spazio, fuorchè per i punti delle superficie nelle quali, passando dall' una all' altra parte, si ha una discontinuità nelle densità:

$$\Delta^2 V = o,$$

e in queste superficie di discontinuità avremo $\Delta^2 V$ uguale ad una quantità finita per ora incognita ma che troveremo essere uguale a zero.

Pertanto avremo:

$$\iiint \left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} \right) dx\, dy\, dz = o, \tag{2}$$

qualunque siano i limiti degl' integrali; perchè i valori differenti da zero che potrebbe avere $\Delta^2 V$ non possono fare acquistare valori finiti all' integrale triplo non occupando uno spazio di tre dimensioni.

Cominciamo dal considerare l' integrale:

$$\iiint V \frac{d^2 V}{dx^2} dx\, dy\, dz\, .$$

Essendo V e $\frac{d^2 V}{dx^2}$ quantità sempre finite, potremo effettuare un integrazione per parti rispetto alla variabile x; ed estendendo l' integrale stesso tra $+a$ e $-a$, avremo:

$$\int V \frac{d^2 V}{dx^2} dx = \left(V \frac{dV}{dx}\right)_{x=a} - \left(V \frac{dV}{dx}\right)_{x=-a} - \int \frac{dV^2}{dx^2} dx ,$$

essendo $V \frac{dV}{dx}$ una funzione continua di x. Operando analogamente sopra gli altri due integrali, si ottiene:

$$\iint_{-a}^{a} \left[\left(V \frac{dV}{dx}\right)_a - \left(V \frac{dV}{dx}\right)_{-a}\right] dy\, dz + \iint_{-a}^{a} \left[\left(V \frac{dV}{dy}\right)_a - \left(V \frac{dV}{dy}\right)_{-a}\right] dz\, dx$$

$$+ \iint_{-a}^{a} \left[\left(V \frac{dV}{dz}\right)_a - \left(V \frac{dV}{dz}\right)_{-a}\right] dx\, dy - \iiint_{-a}^{a} \left(\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2}\right) dx\, dy\, dz = o\, .$$

Ora a cagione delle proprietà 1.ª e 2.ª di P e di P', a V_a e $a^2 \left(\frac{dV}{dx}\right)_a$ si mantengono sempre finite; quindi si potrà determinare una quantità costante k di cui

$$a^3 \left[\left(V \frac{dV}{dx}\right)_a - \left(V \frac{dV}{dx}\right)_{-a}\right]$$

si mantiene sempre minore; avremo dunque:

$$\iint_{-a}^{a}\left[\left(V\frac{dV}{dx}\right)_{a}-\left(V\frac{dV}{dx}\right)_{-a}\right]dy\,dz < \frac{k}{a^{3}}\iint_{-a}^{a}dy\,dz=\frac{4k}{a},$$

e quindi:

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\left(V\frac{dV}{dx}\right)_{\infty}-\left(V\frac{dV}{dx}\right)_{-\infty}\right]dy\,dz=o;$$

così degli altri due integrali. Dunque avremo:

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dV^{2}}{dx^{2}}+\frac{dV^{2}}{dy^{2}}+\frac{dV^{2}}{dz^{2}}\right)dx\,dy\,dz=o;$$

ma essendo la quantità sotto il segno sempre finita, continua e positiva, dovrà essere:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{dy}=\frac{dV}{dz}=o;$$

onde:

$$V = \text{costante}.$$

Ma all' infinito, $P = P' = o$, quindi sempre:

$$P - P' = V = o,$$

come volevamo dimostrare e: $\Delta^{2} V = o$ anche sopra la superficie come avevamo accennato.

IV.

Teorema di Green.

Uno spazio di tre dimensioni si dice *connesso*, quando si può andare con continuità senza escire dal medesimo da uno ad un altro qualunque dei suoi punti. Si dice *semplicemente connesso* quando ogni superficie chiusa S tracciata nel medesimo, limita completamente una parte T dello stesso spazio in modo che non si possa uscire da T senza attraversare S, e quando ogni linea chiusa l tracciata in esso può servire di contorno ad una superficie continua S, contenuta tutta nello spazio medesimo. Per esempio, lo spazio racchiuso da una sfera è semplicemente connesso; quello racchiuso da un involucro sferico è connesso ma non semplicemente, perchè una superficie sferica compresa tra l'interna e l'esterna superficie dell'involucro non limita da sè sola una parte dell'involucro; un anello è connesso ma non semplicemente, giacchè il suo asse interno non può formare il contorno d'una superficie continua contenuta tutta quanta nell'anello.

Sia ora R uno spazio connesso. Supponiamo che non sia semplicemente connesso, ma si ottenga togliendo da uno spazio connesso limitato da una superficie chiusa S gli spazii connessi limitati dalle superficie chiuse S′, S″, S‴,.... interne ad S. Siano U e V due funzioni dei punti di R che si conservino insieme con le loro derivate prime sempre finite e continue in R.

Prendiamo l'integrale triplo esteso a tutto lo spazio R:

$$\Omega = \iiint \left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right) dx\, dy\, dz\ .$$

integrando per parti, abbiamo:

$$\iiint \frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} dx\, dy\, dz = \iint \left(U\frac{dV}{dx}\right) dy\, dz - \iiint U \frac{d^2V}{dx^2} dx\, dy\, dz,$$

dove la quantità tra parentesi sotto l' integrale doppio deve essere limitata ai tratti lineari paralleli all' asse delle x compresi nello spazio R e per ottenere questa limitazione, essendo $U\frac{dV}{dx}$ quantità sempre finita e continua in R, basterà prendere le differenze dei valori che riceve $U\frac{dV}{dx}$ nei punti delle superficie S, S', S''... quando un punto che si muova parallelamente all' asse delle x verso il piano $y\,z$ entra nello spazio R e quelli che prende la stessa quantità quando il punto esce dallo spazio R. Avremo dunque, distinguendo con apici questi valori:

$$\iint\left(U\frac{dV}{dx}\right)dy\,dz=\iint U_0\frac{dV_0}{dx}dy\,dz-\iint U_1\frac{dV_1}{dx}dy\,dz+\iint U_2\frac{dV_2}{dx}dy\,dz+\dots$$

Ora indicando con $d\sigma$ in generale l' elemento di superficie e con α l' angolo che la parte interna della normale fa coll' asse delle x, avremo:

$$dy\,dz=\pm\,d\sigma\cos\alpha,$$

dove gli elementi superficiali essendo essenzialmente positivi dovrà prendersi il segno $+$ se α è acuto, il segno $-$ se α è ottuso. Ma quando il punto che si muove verso il piano $y\,z$ parallelamente ad x entra in R l' angolo α è ottuso, e quando esce è acuto, dunque avremo:

$$\iint\left(U\frac{dV}{dx}\right)dy\,dz=-\int U_0\frac{dV_0}{dx}d\sigma\cos\alpha-\int U_1\frac{dV_1}{dx}d\sigma\cos\alpha$$

$$-\int U_2\frac{dV_2}{dx}d\sigma\cos\alpha-\dots$$

e gli integrali sono estesi in modo che l'insieme sia esteso a tutte le superficie che limitano R; onde distinguendo con apici gli elementi $d\sigma$ e gli angoli α relativi alle superficie S, S', S''..., avremo:

$$\iint\left(U\frac{dV}{dx}\right)dy\,dz = -\iint U\frac{dV}{dx}d\sigma\cos\alpha - \iint U\frac{dV}{dx}d\sigma'\cos\alpha' - \ldots$$

Ora dinotando con p, p', p''... le normali alle superficie S, S'... si ha:

$$\frac{dx}{dp} = \cos\alpha\,, \quad \frac{dx}{dp'} = \cos\alpha'\,, \ldots$$

onde:

$$\iint\left(U\frac{dV}{dx}\right)dy\,dz = -\Sigma\int U\frac{dV}{dx}\,\frac{dx}{dp}\,d\sigma\,,$$

$$\iint\left(U\frac{dV}{dy}\right)dz\,dx = -\Sigma\int U\frac{dV}{dy}\,\frac{dy}{dp}\,d\sigma\,,$$

$$\iint\left(U\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy = -\Sigma\int U\frac{dV}{dz}\,\frac{dz}{dp}\,d\sigma\,,$$

e finalmente, sostituendo nel valore di Ω:

$$(1)\qquad -\Omega = \Sigma\int U\frac{dV}{dp}d\sigma + \iiint U\,\Delta^2 V\,dx\,dy\,dz\,.$$

Analogamente operando relativamente alla funzione V, si ottiene:

$$-\Omega = \Sigma\int V\frac{dU}{dp}d\sigma + \iiint V\,\Delta^2 U\,dx\,dy\,dz\,,$$

e quindi:

$$(2)\qquad \Sigma\int U\frac{dV}{dp}\,d\sigma + \iiint U\,\Delta^2 V\,dx\,dy\,dz$$

$$=\Sigma\int V\frac{dU}{dp}\,d\sigma + \iiint V\,\Delta^2 U\,dx\,dy\,dz\,.$$

Se lo spazio R in cui le funzioni U e V si conservano finite e continue insieme colle loro derivate prime fosse semplicemente connesso, nella equazione (1) si potrebbero estendere gl'integrali doppi a una sola superficie chiusa qualunque contenuta nello spazio R, e gl'integrali tripli a tutto lo spazio racchiuso da questa superficie.

Supponiamo ora che la funzione U cessi d'essere finita soltanto in un punto O dello spazio R. Allora l'equazione (2) varrà in tutto lo spazio T che si ottiene togliendo dallo spazio R uno spazio piccolo quanto si vuole, che racchiuda il punto O; ossia se alle superficie S, S'... aggiungiamo una sfera s col centro in O e con un raggio infinitesimo ε; avremo dunque:

$$\Sigma\int U\frac{dV}{dp}\,d\sigma + \int U\frac{dV}{dp}\,ds + \iiint U\,\Delta^2 V\,dx\,dy\,dz$$

$$=\Sigma\int V\frac{dU}{dp}\,d\sigma + \int V\frac{dU}{dp}\,ds + \iiint V\,\Delta^2 U\,dx\,dy\,dz,$$

dove gl'integrali tripli devono essere estesi a tutto lo spazio precedente meno la piccola sfera. Ora se U diviene infinito nel punto O come $\frac{e}{r}$ essendo r la distanza da un punto qualunque al punto O; cioè se *lim* r U è eguale ad

una quantità finita e, avremo sulla superficie della piccola sfera

$$U = \frac{e}{\varepsilon},$$

$$\frac{dU}{dp} = \left(\frac{dU}{dr}\right)_{r=\varepsilon} = -\frac{e}{\varepsilon^2},$$

e quindi:

$$\int U \frac{dV}{dp} \, ds = \varepsilon \, e \int \frac{dV}{dp} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\int V \frac{dU}{dp} \, ds = -e \int V \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi = -4\pi V' e,$$

essendo V' il valore che prende V nel punto O. L'integrale triplo esteso alla piccola sfera dà:

$$\iiint U \Delta^2 V \, dx \, dy \, dz = e \Delta^2 V \iiint r \, dr \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi \varepsilon^2 \Delta^2 V$$

e poichè nello spazio racchiuso dalla piccola sfera abbiamo:

$$\Delta^2 U = \Delta^2 \frac{e}{r} = o;$$

l'altro integrale triplo esteso a questo spazio sarà:

$$\iiint V \Delta^2 U \, dx \, dy \, dz = o;$$

onde per ε infinitamente piccolo la (2) diviene:

$$(3) \quad \Sigma \int U \frac{dV}{dp} \, d\sigma + \iiint U \Delta^2 V \, dx \, dy \, dz = \Sigma \int V \frac{dU}{dp} \, d\sigma +$$

$$+ \iiint V \Delta^2 U \, dx \, dy \, dz - 4\pi V' e,$$

e gli integrali sono estesi come nell'equazione (3). Dalla equazione (3) che constituisce il teorema di *Green* si deducono vari teoremi molto importanti. Prendiamo $U = \frac{1}{r}$ essendo r il raggio vettore che parte da un punto qualunque O nell'interno di R e l'equazione (3) diviene:

$$(4) \quad 4\pi V' = -\iiint \frac{\Delta^2 V}{r} dx\, dy\, dz + \int \left(V \frac{d\frac{1}{r}}{dp} - \frac{1}{r} \frac{dV}{dp} \right) d\sigma,$$

dove l'ultimo integrale deve essere esteso a tutto l'insieme delle superficie che limitano lo spazio R. L'equazione (4) ci dice che una funzione finita e continua qualunque è determinata in uno spazio R quando si conoscono la somma delle sue derivate seconde, e i valori di essa e delle sue derivate prime alla superficie. Sia $U = 1$, sarà:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dy} = \frac{dU}{dz} = \Omega = 0,$$

e sia inoltre $\Delta^2 V = -4\pi\rho$; l'equazione (1) darà:

$$(5) \qquad \Sigma \int \frac{dV}{dp} d\sigma = 4\pi \iiint \rho\, dx\, dy\, dz \,.$$

Dall'equazione (5) si deduce il seguente teorema:

1.° *Se V indica il potenziale di una massa qualunque, l'integrale:*

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{dV}{dp} d\sigma$$

esteso a una superficie chiusa è eguale alla quantità di massa contenuta nello spazio racchiuso da questa superficie, e quindi è eguale a zero se in questo spazio non vi esiste nessuna porzione di questa massa.

Ponendo nella equazione (3) $V = 1$, e $\Delta^2 U = o$, si ottiene il teorema:

2.° *Se* U *è una funzione finita e continua in tutto lo spazio chiuso da una superficie, fuori che in un punto* O *dove diviene infinita come* $\frac{e}{r}$, *denotando* r *la distanza dal punto* O, *e* $\Delta^2 U = o$; *avremo*:

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{dU}{dp}\, d\sigma = e\,,$$

estendendo l'integrale a tutta la superficie.

Quindi se $U = \frac{1}{r}$ abbiamo il seguente teorema dovuto a *Gauss*:

3.° *L'integrale*:

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{d\frac{1}{r}}{dp}\, d\sigma$$

esteso a tutta una superficie chiusa qualunque è eguale a zero o alla unità, secondo che il punto O *origine del raggio vettore* r *è esterno o interno allo spazio racchiuso da questa superficie.*

Se $U = V$ avremo:

$$-\Omega = -\iiint \left(\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2}\right) dx\,dy\,dz = \int V \frac{dV}{dp}\, d\sigma$$

$$+ \iiint V\, \Delta^2 V\; dx\, dy\, dz\,.$$

Onde se: $\Delta^2 V = o$ e V costante sopra la superficie, sarà;

$$\iiint \left(\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2}\right) dx\,dy\,dz = o\,,$$

estendendo l' integrale a tutto lo spazio racchiuso dalla superficie. Quindi se V in questo spazio è finito e continuo, sarà:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dz} = o,$$

$$V = \text{costante};$$

e abbiamo il seguente teorema:

4.° *Se V è una funzione finita e continua insieme colle sue derivate in uno spazio limitato da una o più superficie chiuse, sodisfa all'equazione:* $\Delta^2 V = 0$ *ed ha un valore costante sopra tutte le superficie, sarà eguale a questa costante anche in tutto lo spazio racchiuso dalle superficie stesse.*

V.

Superficie e strati di livello.

Sia V il potenziale di una massa M; le superficie rappresentate dall' equazioni della forma:

$$V = \text{costante},$$

da *Chasles* sono state chiamate *superficie di livello*.

Queste superficie godono la proprietà che la direzione della risultante dell'attrazione esercitata dalla massa M sopra i loro punti è normale alle superficie medesime. Infatti imaginiamo una linea qualunque tracciata sopra una di queste superficie, e che passi per un punto m qualunque della medesima. Se denotiamo con s la lunghezza dell' arco di questa linea contata a partire da uno qualunque dei suoi punti, l' equazioni della curva potranno porsi sotto la forma;

$x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$; e avremo identicamente: $V[x(s), y(s), z(s)] =$ costante; onde:

$$\frac{dV}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{ds} = 0,$$

ed essendo $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ i coseni degli angoli della tangente alla linea con i tre assi, e $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$ le componenti dell'attrazione secondo i tre assi, la componente nel senso della tangente sarà nulla, ossia la componente in un senso perpendicolare alla normale, è sempre nulla e dunque la risultante dell'attrazione è normale alle superficie.

Le superficie di livello formano un sistema di superficie l'equazioni delle quali differiscono soltanto per il valore di una costante, e poichè all' infinito il potenziale ha un valore costante ed eguale a zero, una superficie di questo sistema sarà una sfera di raggio infinito col centro non situato all' infinito.

Determiniamo ora le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un sistema di superficie possa essere un sistema di superficie di livello rispetto ad un potenziale.

Sia:

$$f(x, y, z, \lambda) = 0 \tag{1}$$

l'equazione di una superficie di un sistema, e l'equazioni delle varie superficie del sistema si ottengano dando a λ tutti i valori compresi tra due limiti dati λ_0 e λ_1.

Se esiste un potenziale V di una massa M esterna allo spazio compreso tra le superficie (λ_0) e (λ_1), rispetto a cui le superficie di questo sistema sono di livello, questo potenziale dovrà essere una funzione della sola quantità λ, perchè deve variare soltanto col variare di λ. Ma in tutto lo spazio

compreso tra le superficie (λ_0) e (λ_1), esterno alla massa M di cui è potenziale V, si ha:

$$(2) \qquad \Delta^2 V = 0$$

e V funzione della sola λ; quindi:

$$\Delta^2 V = \frac{d^2 V}{d\lambda^2}\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] + \frac{dV}{d\lambda}\Delta^2\lambda = 0,$$

e posto:

$$\Delta\lambda = \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2,$$

avremo:

$$(3) \qquad \frac{\frac{d^2 V}{d\lambda^2}}{\frac{dV}{d\lambda}} = -\frac{\Delta^2\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Il primo membro deve essere funzione della sola λ, e quindi anche il 2° non deve contenere altre variabili che λ.

Dunque chiamando con *Lamé*, $\Delta\lambda$ il *parametro differenziale di 1.° ordine e* $\Delta^2\lambda$ il *parametro differenziale di 2.° ordine* del sistema (1), potremo dire: affinchè le superficie del sistema (1) siano superficie di livello è necessario che il rapporto dei suoi parametri differenziali sia una funzione della sola λ.

Affinchè poi V sia un potenziale è necessario inoltre che siavi un valore di λ a cui risponda una superficie d'equazione (1) che sia una sfera di raggio infinito e col centro non situato all'infinito.

Queste condizioni sono sufficienti perchè il sistema (1) sia di livello.

Infatti, essendo il 2.° membro dell'equazione (3) una fun-

zione della sola λ che potremo rappresentare con $\phi(\lambda)$, avremo, integrando:

$$\log \frac{dV}{d\lambda} = \int \phi(\lambda)\, d\lambda + \log C$$

$$\frac{dV}{d\lambda} = C\, e^{\int \phi(\lambda)\, d\lambda}$$

$$V = C \int e^{\int \phi(\lambda)\, d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda} + C'$$

indicando con λ_1 il valore di λ che corrisponde ai punti della sfera di raggio infinito, avremo poichè ivi si ha: $V = o$:

$$V = C \int_{\lambda}^{\lambda_1} e^{\int \phi(\lambda)\, d\lambda}.$$

Ora se $\phi(\lambda)$ si mantiene insieme colle sue derivate prime finita e continua in tutto lo spazio compreso tra le due superficie (λ_0) e (λ_1), V è una funzione che in questo spazio si mantiene sempre insieme colle sue derivate prime finita e continua, quindi essendo

$$\Delta^2 V = o,$$

dall'equazione (4) del paragrafo precedente avremo:

$$V' = \frac{1}{4\pi} \int \left(V \frac{d\frac{1}{r}}{dp} - \frac{1}{r} \frac{dV}{dp} \right) d\sigma,$$

e questo integrale deve estendersi a tutta la superficie (λ_1) e a tutta la superficie (λ_0). Ma sopra la superficie (λ_1), cioè all'infinito, abbiamo:

$$V = o, \; r \frac{dV}{dp} = o;$$

quindi la parte d'integrale relativa a (λ_1) è uguale a zero. Sopra la superficie (λ_0) V è uguale a una costante che chiameremo V_0; abbiamo dunque:

$$V = \frac{V_0}{4\pi} \int \frac{d\frac{1}{r}}{dp} d\sigma - \int \frac{1}{r} \frac{dV}{dp} d\sigma ,$$

dove l'integrale deve estendersi alla sola superficie (λ_0). Ora per il teorema 3.° del §. IV., essendo i punti dello spazio in cui si considera la funzione, esterni alle superficie cui si riferiscono, l'integrale:

$$\int \frac{d\frac{1}{r}}{dp} d\sigma = o ;$$

onde:

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{dV}{dp} d\sigma ;$$

e se il senso dell'aumento della normale si prende invece che dalla parte interna dello spazio compreso tra (λ_0) e (λ_1) dalla parte interna della superfice (λ_1), bisognerà cambiar segno ed avremo:

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{dV}{dp} d\sigma .$$

Ma:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{dV}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dp} ,$$

$$\frac{d\lambda}{dp} = \frac{d\lambda}{dx} \frac{dx}{dp} + \frac{d\lambda}{dy} \frac{dy}{dp} + \frac{d\lambda}{dz} \frac{dz}{dp}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{d\lambda}{dx} \frac{1}{\sqrt{\Delta\lambda}} , \quad \frac{dy}{dp} = \frac{d\lambda}{dy} \frac{1}{\sqrt{\Delta\lambda}} , \quad \frac{dz}{dp} = \frac{d\lambda}{dz} \frac{1}{\sqrt{\Delta\lambda}} .$$

Onde:

$$\frac{d\lambda}{dp} = \sqrt{\Delta\lambda}\,, \quad \frac{dV}{dp} = \frac{dV}{d\lambda}\sqrt{\Delta\lambda}.$$

quindi:

$$V = \frac{1}{4\pi}\frac{dV}{d\lambda}\int\frac{\sqrt{\Delta\lambda}\,d\sigma}{r}.$$

Imaginiamo ora prolungate le normali della superficie (λ_0) di una lunghezza dp proporzionale a $\sqrt{\Delta\lambda}$; l'estremità di questi prolungamenti formeranno una superficie L infinitamente poco differente dalla superficie (λ_0), ed è chiaro che V sarà il potenziale dello strato omogeneo di densità $\frac{dV}{d\lambda}\frac{1}{4\pi}$ compreso tra le superficie L e (λ_0) al quale il sig. *Chasles* ha dato il nome di *strato di livello*, e avremo il seguente teorema.

Il sistema di superficie rappresentato dall' equazione:

$$F(x, y, z, \lambda) = o,$$

sarà un sistema di superficie di livello soltanto quando il rapporto del parametro differenziale di 2.° ordine $\Delta^2\lambda$ al parametro differenziale di 1.° ordine $\Delta\lambda$ è una funzione della sola λ; vi è un valore λ_1 di λ per cui una superficie del sistema diviene una sfera di raggio infinito col centro non situato all' infinito, e queste superficie sono di livello rispetto al potenziale d' uno strato omogeneo compreso tra una superficie del sistema e un altra superficie che è il luogo geometrico delle estremità delle normali prolungate di lunghezze infinitesime proporzionali a $\sqrt{\Delta\lambda}$.

Il potenziale d'uno strato di livello nei punti esterni è costante sopra ogni superficie di livello e varia da una di queste superficie ad un' altra.

Poichè la funzione V è costante sopra le superficie dello strato di livell o e nello spazio racchiuso da questa superficie sodisfa alle condizioni del teorema 4.° del §. IV.,

sarà costante in tutto questo spazio, e avremo il seguente teorema:

Il potenziale di uno strato di livello nello spazio racchiuso dalla sua superficie è costante.

Siano ora le superficie rappresentate dalle equazioni;

$$f(x, y, z, \lambda, h) = o\ ,$$

superficie di livello per i valori di λ compresi tra due limiti λ_0 e λ_1. Vediamo quali condizioni sono necessarie e sufficienti perchè gli strati di livello siano gli strati compresi tra due superficie corrispondenti ai valori h e $h + dh$. Perciò basterà che le porzioni di normali alle superficie (λ, h) intercettate tra (λ, h) e $(\lambda, h + dh)$ siano proporzionali a $\sqrt{\Delta\lambda}$, radice del parametro differenziale di 1.° ordine. Sia (x, y, z) un punto della superficie (λ, h); $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ il punto dove la normale alla superficie (λ, h) nel punto (x, y, z) incontra la superficie $(\lambda, h + dh)$. Se chiamiamo dp la lunghezza di questa normale, avremo:

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{\Delta f}} \frac{df}{dx}\ ,\ dy = \frac{dp}{\sqrt{\Delta f}} \frac{df}{dy}\ ,\ dz = \frac{dp}{\sqrt{\Delta f}} \frac{df}{dz}\ ;$$

e dovendo essere il punto $(x + dx, y + dy, z + dz)$ un punto della superficie $(\lambda, h + dh)$ avremo:

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz + \frac{df}{dh} dh = o\ ,$$

ossia:

$$dp \sqrt{\Delta f} + \frac{df}{dh} dh = o,$$

ed essendo.

$$(a)\quad \frac{df}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{df}{dx}\ ,\ \frac{df}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dy} = -\frac{df}{dy}\ ,\ \frac{df}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dz} = -\frac{df}{dz},$$

e quindi:

$$\Delta f = \frac{d f^2}{d \lambda^2} \Delta \lambda .$$

abbiamo:

$$\frac{d p}{\sqrt{\Delta \lambda}} = \pm \frac{\frac{d f}{d \lambda} \; \frac{d f}{d h}}{\Delta f} d h.$$

Quindi affinchè gli strati compresi tra le superficie (λ, h) e (λ, $h + d h$) siano di livello ed abbiano per superficie di livello le superficie (λ) è necessario e sufficiente che oltre ad essere sodisfatta la equazione (3), sia eguale ad una quantità costante il rapporto:

$$\frac{\frac{d f}{d \lambda} \; \frac{d f}{d h}}{\Delta f} .$$

Dovranno dunque essere sodisfatte le due equazioni:

(b) $$\Delta^2 \lambda = \phi (\lambda) \Delta \lambda ,$$

(c) $$\Delta f = \theta (h) \frac{d f}{d \lambda} \; \frac{d f}{d h} ,$$

dove ϕ è una funzione arbitraria di h e di λ, e θ è una funzione arbitraria della sola h.

Derivando la prima delle equazioni (a) rapporto ad x abbiamo:

$$\frac{d^2 f}{d x^2} + 2 \frac{d^2 f}{d x \, d \lambda} \frac{d \lambda}{d x} + \frac{d^2 f}{d \lambda^2} \frac{d \lambda^2}{d x^2} + \frac{d f}{d \lambda} \frac{d^2 \lambda}{d x^2} = o ,$$

Moltiplicando per $\frac{df}{d\lambda}$ ed osservando l'equazioni (a) si ottiene:

$$\frac{df}{d\lambda}\frac{d^2f}{dx^2}-2\frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dx\,d\lambda}+\frac{d^2f}{d\lambda^2}\frac{df}{d\lambda}\frac{d\lambda^2}{dx^2}+\frac{df^2}{d\lambda^2}\frac{d^2\lambda}{dx^2}=o,$$

e due altre analoghe per y e z. Sommando queste tre equazioni abbiamo:

$$\frac{df}{d\lambda}\Delta^2 f-\frac{d\Delta f}{d\lambda}+\frac{df}{d\lambda}\frac{d^2f}{d\lambda^2}\Delta\lambda+\frac{df^2}{d\lambda^2}\Delta^2\lambda=o\ ,$$

onde, l'equazione (b) prende la forma

$$\Delta^2 f+\frac{\phi(\lambda)\Delta f}{\frac{df}{d\lambda}}-\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\Delta f}{\frac{df}{d\lambda}}\right)=o,$$

e quindi a cagione della equazione (c):

$$\text{(d)}\qquad \Delta^2 f+\theta(h)\,\phi(\lambda)\,\frac{df}{dh}-\theta(h)\,\frac{d^2f}{d\lambda\,dh}=o\,.$$

L'equazioni (c) e (d) esprimono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè $f=o$ rappresenti un sistema di superficie di livello, per le quali ai differenti valori di λ corrispondono le differenti superficie di livello, e gli strati di livello siano compresi tra due superficie corrispondenti ai valori h e $h+dh$.

Prendiamo ora l'equazione $f=o$, sotto la forma:

$$f=\mathrm{F}-\psi(h)=o,$$

dove F non contiene h.

Avremo:

$$\frac{d^2 f}{dh\, d\lambda} = o\,, \quad \frac{d f}{dh} = -\psi'(\mathrm{h})\,, \quad \frac{d f}{d\lambda} = \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,\lambda}$$

$$\Delta^2 f = \Delta^2 \mathrm{F}\,, \quad \Delta f = \Delta\, \mathrm{F}$$

e poniamo:

$$-\mathrm{H} = \theta(\mathrm{h})\ \psi'(\mathrm{h})\,.$$

L' equazioni (c) e (d) diverranno:

$$\Delta^2 \mathrm{F} = \mathrm{H}\ \phi(\lambda)$$

$$\Delta\, \mathrm{F} = -\mathrm{H}\,\frac{d\mathrm{F}}{d\,\lambda}\,,$$

onde abbiamo il seguente teorema:

Affinchè il potenziale di una massa omogenea compresa tra due superficie del sistema:

$$\mathrm{F}\,(x,\, y,\, z,\, \lambda_0) - \psi\,(\mathrm{h}) = o\,,$$

corrispondenti a due valori di h *che differiscono tra loro di una quantità infinitesima, abbia per superficie di livello, le superficie del sistema*:

$$\mathrm{F}\,(x,\, y,\, z,\, \lambda) - \psi\,(\mathrm{h}) = o$$

corrispondenti ai diversi valori di λ *compresi tra* λ_0 *e* λ_1, *al valore* λ_1 *corrispondendo i punti all' infinito, é necessario e sufficiente che in questo spazio siano sodisfatte le due equazioni*:

$$(4) \qquad \Delta\, \mathrm{F} = -\mathrm{H}\,\frac{d\,\mathrm{F}}{d\,\lambda}\,,$$

$$(5) \qquad \Delta^2 \mathrm{F} = \mathrm{H}\ \phi\,(\lambda)\,,$$

dove H *è funzione soltanto di* h.

VI.

Potenziale di una massa omogenea compresa tra due ellissoidi omotetiche.

Si voglia il potenziale di una massa omogenea M che occupa lo spazio compreso tra due ellissoidi omotetiche le quali hanno per equazioni:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=h_0^2\,,$$

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=h_1^2\,.$$

Prendiamo l' equazione:

$$(3)\qquad F-h^2=A\,x^2+B\,y^2+C\,z^2-h^2=o\,,$$

e se è possibile, determiniamo A, B e C in funzione di λ, in modo che si abbia:

$$(4)\qquad \Delta\,F=-\,H\,\frac{dF}{d\lambda}\,,$$

$$(5)\qquad \Delta^2\,F=H\,\phi\,(\lambda)$$

e per $\lambda=o$ siano:

$$(6)\qquad A=\frac{1}{a^2}\,,\qquad B=\frac{1}{b^2}\,,\qquad C=\frac{1}{c^2}\,,$$

e per $\lambda = \infty$:

$$x = y = z = \infty .$$

Sostituendo i valori delle derivate di F nella equazione (4), abbiamo:

$$4\left(A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2\right) = - H\left(\frac{dA}{d\lambda} x^2 + \frac{dB}{d\lambda} y^2 + \frac{dC}{d\lambda} z^2\right);$$

onde:

$$H \frac{dA}{d\lambda} = - 4 A^2 ,$$

$$H \frac{dB}{d\lambda} = - 4 B^2 ,$$

$$H \frac{dC}{d\lambda} = - 4 C^2 .$$

Integrando, ponendo $H = 4$, ed osservando che per $\lambda = o$ debbono aversi l'equazioni (6), si ottiene:

$$A = \frac{1}{a^2 + \lambda} ,$$

$$B = \frac{1}{b^2 + \lambda} ,$$

$$C = \frac{1}{c^2 + \lambda} .$$

e quindi l'equazione (3) diviene :

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=h^2, \tag{7}$$

e per $\lambda=\infty$ si ha :

$$x=y=z=\infty .$$

Sostituendo le derivate seconde di F nella equazione (5) abbiamo:

$$\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}=2\,\phi(\lambda). \tag{8}$$

L'equazione (7) che rappresenta un sistema di superficie omofocali tra loro e coll'ellissoidi di equazione (1) e (2) per $h=h_0$ ed $h=h_1$, daranno per tutti i valori reali di λ compresi tra o e ∞ altrettante superficie di livello dello strato omogeneo compreso tra due ellissoidi omotetiche corrispondenti a $\lambda=o$, e ad h e $h+dh$. Il potenziale di questo strato sarà nello spazio esterno ad esso:

$$p_e=C\int_{\lambda}^{\infty} e^{-\int\phi(\lambda)\,d\lambda},$$

e ponendo mente alla equazione (8):

$$p_e=C\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}}\cdot$$

dove, se (ξ,η,ζ) denotano le coordinate del punto attratto, λ è determinato dall'equazione:

$$\frac{\xi^2}{a^2+\lambda}+\frac{\eta^2}{b^2+\lambda}+\frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}=h^2, \tag{9}$$

Per determinare C osservo, come altre volte, che si ha:

$$\lim_{l=\infty} p_e l = \mathrm{M} = \tfrac{4}{3}\pi abc\, h^2 dh\,,$$

essendo l il raggio vettore del punto attratto. Ora col crescere di l, i semi assi:

$$h\sqrt{a^2+\lambda}\quad,\quad h\sqrt{b^2+\lambda}\quad,\quad h\sqrt{c^2+\lambda}$$

dell'ellissoide che passa per il punto attratto s'avvicinano indefinitamente ad l, quindi:

$$\lim h^2(a^2+\lambda) = \lim h^2(b^2+\lambda) = \lim h^2(c^2+\lambda) = l^2\,,$$

$$\lim h^2 d\lambda = 2\,l dl\,;$$

e quindi:

$$\lim p_e l = \mathrm{C}\,l\int_l^\infty \frac{2h\,dl}{l^2} = 2\,\mathrm{C}h\,,$$

onde:

$$\mathrm{C} = 2\,\pi abc\,h\,dh\,,$$

e:

$$(10)\quad p_e = 2\pi abc\,hdh\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}}\,.$$

Nella superficie dello strato il potenziale, che è una funzione continua, s'ottiene ponendo $\lambda = o$, e questo sarà il valore nella faccia interna della superficie e in tutto lo spazio

racchiuso dallo strato, perchè vi deve rimanere sempre costante, e abbiamo:

$$(11)\quad p_e' = 2\pi\, abc\, h\,dh \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}}.$$

Per avere il potenziale P_e dell'involucro compreso tra le due superficie (1) e (2) rispetto ai punti esterni, dovremo prendere l'integrale del 2.° membro della equazione (10) ed estenderlo tra i limiti h_0 ed h_1. Per avere il potenziale P_e' rispetto ai punti dello spazio racchiuso dal medesimo involucro, dovremo fare lo stesso col secondo membro dell'equazione (11). Avremo dunque:

$$(12)\quad P_e = 2\pi\, abc \int_{h_0}^{h_1} h\,dh \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}}$$

dove tra λ ed h esiste la relazione (9):

$$(13)\quad P_e' = 2\pi\, abc \int_{h_0}^{h_1} h\,dh \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}}.$$

Se indichiamo con λ_1 e λ_0 i valori di λ dati dall'equazione (9) quando in essa per h si pongano i valori h_1 e h_0, e se integriamo per parti nell'equazione (12) si ha:

$$(14)\quad P_e = \pi\, abc\, (h_1^2 - h_0^2) \int_{\lambda_0}^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}}$$

$$-\pi\, abc \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(h_1^2 - \frac{\xi^2}{a^2+\lambda} - \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} - \frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}}.$$

Integrando nell' equazione (13) abbiamo:

$$P_e' = \pi abc\,(h_1^2 - h_0^2)\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\,.$$

Per avere il potenziale P_i relativo ad un punto che fa parte della massa dell'involucro, ed è di coordinate (ξ, η, ζ), conduciamo per esso un' ellissoide omotetica alle due superficie dell'involucro, di equazione:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = h^2\,,$$

essendo $h_1 > h > h_0$. Il potenziale P_i si comporrà del potenziale P' dell'involucro (h_1, h) e del potenziale P'' dell'involucro (h, h_0) relativi al punto (ξ, η, ζ) che è sulla superficie interna del primo ed esterna del secondo.

Avremo cioè:

$$P_i = P' + P''\,.$$

Ma:

$$P' = \pi abc\,(h_1^2 - h^2)\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\,,$$

$$P'' = \pi abc\,(h^2 - h_0^2)\int_{\lambda_0}^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

$$-\pi abc\int_{\lambda_0}^{0}\left(h^2 - \frac{\xi^2}{a^2+\lambda} - \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} - \frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\,,$$

onde :

$$(15)\quad P_i = \pi abc\,(h_1^2 - h_0^2)\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

$$+\,\pi abc \int_0^{\lambda_0} \left(h_1^2 - \frac{\xi^2}{a^2+\lambda} - \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} - \frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Per avere il potenziale esterno e interno di una ellissoide basterà porre nelle formule (14) e (15) $h_0 = o$, $\lambda_0 = \infty$ e quindi avremo:

$$(16)\quad P_e = \pi abc \int_{\lambda_0}^{\infty} \left(h_1^2 - \frac{\xi^2}{a^2+\lambda} - \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} - \frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

$$(17)\quad P_i = \pi abc \int_0^{\infty} \left(h_1^2 - \frac{\xi^2}{a^2+\lambda} - \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} - \frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Ponendo $a^2 = b^2 = c^2 = R^2$, $h = 1$, avremo il potenziale della sfera. Poniamo:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2 .$$

Integrando si ottiene facilmente:

$$P_e = \frac{4}{3}\,\frac{\pi R^3}{r}$$

e

$$P_i = 2\pi R^2 - \tfrac{2}{3}\pi r^2 ,$$

come avevamo trovato nel §. 2.

Si può verificare facilmente l'espressione del potenziale che abbiamo dato per mezzo del teorema di *Dirichlet.*

VII.

Potenziale di una superficie.

Supponiamo che dai punti di una superficie emanino delle forze attrattive e ripulsive che agiscano in ragione inversa del quadrato della distanza dal punto attratto e respinto; denotiamo con ρ l'intensità delle loro azioni sopra l'unità di materia concentrata in un punto situato alla distanza uno, se riguardiamo ρ proporzionale alla densità della materia da cui emanano le forze, avremo la legge di *Newton* per queste forze, cioè saranno anche in ragione diretta delle masse. Per distinguere le forze attrattive dalle ripulsive, basterà prendere positive le densità dei punti attraenti e negative quelle dei punti ripellenti. Così potrà accadere che sopra una superficie sia distribuita una massa nulla, e ciò accadrà quando la somma algebrica dei prodotti delle densità per gli elementi di superficie ai quali appartengono, sarà eguale a zero; e questa massa nulla potrà produrre una azione.

Le componenti dell'azione di una massa distribuita sopra una superficie dipenderanno, come nel caso di masse che occupano uno spazio di tre dimensioni, dal potenziale, che denotando con $d\sigma$ gli elementi della superficie, con z $x, y,$ le coordinate del punto attratto e con x', y', z' quelle di un punto qualunque della superficie, sarà:

$$P = \int \rho \frac{d\sigma}{r},$$

essendo .

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 .$$

Quando il punto attratto è all'infinito, $r = \infty$, e quindi tutti gli elementi sono nulli e $P = o$. Prendendo il sistema delle coordinate polari e denotando con r' il raggio

vettore dei punti della superficie, con r'' quello del punto attratto e con θ l'angolo che essi fanno tra loro, avremo:

$$P r'' = \int \frac{\rho \, d \sigma}{\sqrt{1 + \frac{r'^2}{r''^2} - \frac{2 r'}{r''} \cos \theta}} .$$

Quindi per $r'' = \infty$, avremo :

$$lim \; P r'' = \int \rho \, d \sigma = M ;$$

ossia il limite di P moltiplicato per il raggio vettore del punto attratto, quando il punto attratto va all' infinito, è uguale alla totalità della massa ossia alla massa attraente meno la repellente.

Si dimostra pure come nel caso di una massa solida che la funzione P e le sue derivate sono funzioni finite e continue per tutto lo spazio, quando se ne escludono i soli punti della superficie sopra le quali sono distribuite le masse attraenti e repellenti e sodisfano alla equazione :

$$\Delta^2 P = o ,$$

e che le derivate prime si annullano all' infinito, e moltiplicate per i quadrati delle coordinate del punto attratto convergono verso quantità finite coll' allontanarsi indefinitamente di questo punto.

Prima di passare a determinare come variano P e le sue derivate prime quando si attraversa la superficie passando dallo spazio esterno all' interno della medesima e viceversa, determiniamo il potenziale d' una massa attraente distribuita uniformemente sopra una superficie sferica. È chiaro che a cagione della simmetria intorno al centro, il potenziale sarà una funzione del solo raggio vettore del punto attratto, e quindi prendendo le coordinate polari r, θ, ϕ e il polo nel centro, sarà:

$$\frac{d P}{d \theta} = \frac{d P}{d \phi} = o ,$$

e l'equazione:

$$\Delta^2 P = o ,$$

darà:

$$\frac{d r^2 \frac{d P}{d r}}{d r} = o ,$$

ossia:

$$P = \frac{c}{r} + c' .$$

Per i punti esterni alla sfera dobbiamo avere per $r = \infty$ $P = o$, onde $c' = o$. Deve essere inoltre:

$$lim\ P r = M = 4 \pi \rho R^3 ,$$

denotando con R il raggio della sfera e con ρ la densità costante. Quindi il potenziale esterno sarà:

$$P_e = \frac{4 \pi \rho R^3}{r} .$$

Per il potenziale P_e' interno basta osservare che deve essere sempre finito, quindi anche per $r = o$; dunque sarà:

$$P_e' = c' .$$

Per determinare c' basta dunque che si determini P_e' per un punto interno, per esempio, il polo. Abbiamo allora:

$$P_0 = \rho R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi = 4 \pi \rho R ,$$

onde:

Si vede che per $r = R$ i due valori del potenziale interno ed esterno coincidono, dunque il potenziale è una funzione finita e continua in tutto lo spazio.

Abbiamo poi:

$$\frac{d\,P_e}{d\,r} = -\frac{4\,\pi R^2 \rho}{r^2}, \quad \frac{d\,P_i}{d\,r} = o\,.$$

Onde:

$$\left(\frac{d\,P_e}{d\,r}\right)_{r=R} - \left(\frac{d\,P_i}{d\,r}\right)_{r=R} = -\,4\,\pi\,\rho\,.$$

Le derivate prime prese secondo la normale alla superficie nel passare dall' esterno all' interno variano bruscamente di $4\,\pi\,\rho$; dunque le derivate prime sono funzioni sempre finite ma discontinue nel passare attraverso alla superficie.

Determiniamo ora il potenziale di una massa attraente distribuita sopra un' ellissoide di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h^2\,.$$

La densità in ogni suo punto sia proporzionale alla porzione di normale intercettata tra essa e l' ellissoide omotetica corrispondente ad $h + d\,h$.

Abbiamo trovato nel numero precedente il potenziale di questo strato di livello che per un punto esterno è dato dalla formula:

$$P_e = 2\,\pi abc\;h\,dh \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\,\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}},$$

essendo $(\xi,\,\eta,\,\zeta)$ le coordinate del punto attratto e

$$\frac{\xi^2}{a^2+\lambda} + \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\zeta^2}{c^2+\lambda} = h^2:$$

e per i punti interni alla superficie:

$$P_e' = 2\pi abc\, h\, dh \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Per i punti della superficie bisogna porre $\lambda = o$ e abbiamo:

$$P_e = P_e'.$$

Dunque il potenziale è una funzione finita e continua in tutto lo spazio.

Per quello che abbiamo dimostrato alla fine del §. 1.° abbiamo:

$$\frac{dP_e}{dp} = \sqrt{\Delta\lambda}\,\frac{dP_e}{d\lambda} = -\frac{2\pi abc\, h\, dh \sqrt{\Delta\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

$$\frac{dP_i}{dp} = \sqrt{\Delta\lambda}\,\frac{dP_i}{d\lambda} = o.$$

Ma, denotando con ρ la densità, si ottiene facilmente:

$$\rho = dp = \frac{h\, dh}{2}\left(\sqrt{\Delta\lambda}\right)_{\lambda=o}.$$

Quindi:

$$\left(\frac{dP_e}{dp}\right)_{\lambda=o} = -4\pi\rho; \quad \left(\frac{dP_i}{dp}\right)_{\lambda=o} = o;$$

$$\left(\frac{dP_e}{dp}\right)_{\lambda=o} - \left(\frac{dP_i}{dp}\right)_{\lambda=o} = -4\pi\rho.$$

La derivata prima secondo la normale all'ellissoide varia bruscamente di $4\pi\rho$ passando dall'esterno all'interno della medesima.

Osserviamo che il potenziale di tutta la massa distribuita

sull'ellissoide può riguardarsi come composto di due potenziali, uno P' relativo ad una parte e' della superficie, e uno P'' relativo alla rimanente e'' della medesima, cioè:

$$P = P' + P''.$$

Ora prendiamo un punto m nella superficie e'. Per quanto piccola sia la parte di superficie e', quando si fa muovere il punto attratto nello spazio esterno, e poi attraversando e' in m si fa passare nello spazio interno, la funzione P'' e le sue derivate prime si mantengono sempre finite e continue, quindi la differenza delle derivate prime rispetto alla normale in m nella faccia interna ed esterna della superficie avranno una differenza infinitesima, ma queste derivate del potenziale P differiscono di $4\pi\rho$; dunque anche le derivate medesime di P' differiranno di $4\pi\rho$.

Dunque le derivate rispetto alla normale di un elemento ellissoidale sopra la faccia interna ed esterna del medesimo differiscono tra loro di $4\pi\rho$. Poichè P e P'' rimangono continue anche attraversando m, rimarrà continua anche P' e quindi il potenziale di un elemento di superficie ellissoidale è una funzione finita e continua in tutto lo spazio.

Prendiamo ora una superficie qualunque che in ogni suo punto ammette una ellissoide osculatrice. Decomponiamo il suo potenziale in due parti, uno sia il potenziale P' d'una sua parte infinitesima e', che potremo riguardare come un elemento della superficie della ellissoide osculatrice, l'altra sia il potenziale P'' di tutta la rimanente superficie e'', avremo:

$$P = P' + P''.$$

P'' e la sua derivata $\frac{dP''}{dp}$ sono funzioni finite e continue finchè il punto attratto si muove nello spazio interno o esterno, e passa dall'uno all'altro per un punto m di e'. P' è pure sempre finita e continua, ma $\frac{dP'}{dp}$ varia bruscamente

di $4\pi\rho$ quando si passa dallo spazio esterno allo spazio interno attraversando e' in m, quindi anche $\frac{dP}{dp}$ soffrirà la stessa brusca variazione e avremo il seguente teorema:

Il potenziale di una massa distribuita comunque sopra una superficie che ammette in ogni suo punto ellissoidi osculatrici è una funzione finita e continua in tutto lo spazio, le sue derivate prime sono finite e continue in tutto lo spazio, eccettuati i punti della superficie stessa, dove la derivata rapporto alla normale varia bruscamente di $4\pi\rho$, nel passare dall' esterno allo interno.

VIII.

Caratteristiche del potenziale d' una massa distribuita comunque sopra una superficie.

Abbiamo veduto che il potenziale di una massa distribuita comunque sopra una superficie ha le seguenti proprietà.

1.° È una funzione finita e continua in tutto lo spazio, s'annulla all'infinito, e il prodotto di essa per il raggio vettore del punto attratto o respinto col crescere di questo raggio converge verso una quantità eguale alla totalità della massa.

2.° Le derivate prime di questa funzione sono finite in tutto lo spazio, s'annullano all'infinito ed i prodotti di esse per il quadrato del raggio vettore col crescere di questo convergono verso quantità finite, e sono continue in tutti i punti che non si trovano sopra la superficie data.

3.° La derivata presa rispetto alla normale alla superficie stessa nel passare dalla parte esterna all'interna varia bruscamente di valore ed abbiamo:

$$\frac{dP_e}{dp} - \frac{dP_i}{dp} = -4\pi\rho,$$

dove ρ indica la densità in quel punto, p la normale contata andando verso l'interno della superficie.

4.° In tutti i punti dello spazio, ad esclusione dei punti della superficie, abbiamo:

$$\Delta^2 P = o.$$

Queste proprietà come ha osservato *Dirichlet* non solo necessariamente appartengono a tutti i potenziali di superficie, ma sono sufficienti alla loro completa determinazione, sono le loro caratteristiche. Non vi sono due funzioni che avendo queste proprietà a comune possano differire nei loro valori in nessun punto dello spazio.

Supponiamo che P e P' sieno due funzioni che godano tutte le proprietà sopra enunciate, la loro differenza:

$$V = P - P'$$

goderà di tutte le medesime proprietà, soltanto le sue derivate prime saranno continue in tutto lo spazio.

Infatti avremo:

$$\frac{d P_e}{d p} - \frac{d P_i}{d p} = - 4 \pi \rho ,$$

$$\frac{d P_e'}{d p} - \frac{d P_i'}{d p} = - 4 \pi \rho ,$$

onde:

$$\frac{d V_e}{d p} - \frac{d V_i}{d p} = o .$$

Le derivate seconde di P e di P' e quindi di V sodisfacendo l'equazione (2) in tutto lo spazio ad eccezione dei punti della data superficie dove hanno valori finiti, avremo:

$$\iiint_{-a}^{a} V \left(\frac{d^2 V}{d x^2} + V \frac{d^2 V}{d y^2} + V \frac{d^2 V}{d z^2} \right) dx\, dy\, dz = o ,$$

dove a è una quantità qualunque grande quanto si vuole. Effettuando l'integrazione per parti si trova come nella dimostrazione dell'analogo teorema per il potenziale di una massa che occupa uno spazio a tre dimensioni:

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = o\ ,$$

e quindi:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dz} = o$$

$$V = \text{costante}\ .$$

Ma all'infinito $P = P'$ e quindi $V = o$; dunque è sempre $V = o$ come volevamo dimostrare.

Alla terza proprietà caratteristica del potenziale di una massa distribuita sopra una superficie si può sostituire il valore del potenziale nella superficie stessa.

Il teorema precedente porta che ad una data distribuzione di massa sopra una superficie corrisponde un solo potenziale determinato, dimostreremo che vi è anche un solo potenziale che abbia dati valori sulla superficie, e una sola distribuzione di massa sopra la superficie la quale abbia questo potenziale.

Per dimostrare questo ci varremo del seguente teorema:

Esiste sempre una funzione finita e continua insieme colle sue derivate prime in uno spazio connesso, la quale prende dati valori sopra la superficie che forma il contorno di questo spazio, e nello spazio interno sodisfa l'equazione: $\Delta^2 V = o$, *e ne esiste una sola.*

Sia R questo spazio, S la superficie chiusa che lo limita, v la funzione dei punti della superficie S alla quale deve essere uguale in questi punti la funzione di cui si vuol dimostrare la esistenza. Se V è una funzione qualunque che insieme colle sue derivate prime sia finita e continua in

tutto lo spazio R e sia eguale a v sopra la superficie S, è chiaro che l'integrale triplo esteso a tutto lo spazio R:

$$\Omega_V = \iiint \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz$$

avrà un valore finito e positivo. Quindi fra le funzioni V che godono queste proprietà ve ne sarà una almeno che renderà Ω un minimo.

Sia questa: W. Allora ponendo in luogo di W un'altra funzione: $W + h$, o $W - h$ che goda le stesse proprietà, e quindi che alla superficie sia $h = o$, e h e le sue derivate prime siano finite e continue in R, dovrà aversi un valore di Ω maggiore di quello che si aveva per $V = W$. Ma abbiamo:

$$\Omega_{W+h} = \iiint \left[\left(\frac{dW}{dx} \pm \frac{dh}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dy} \pm \frac{dh}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dz} \pm \frac{dW}{dz}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz$$

$$= \Omega_W \pm 2 \iiint \left(\frac{dW}{dx}\frac{dh}{dx} + \frac{dW}{dy}\frac{dh}{dy} + \frac{dW}{dz}\frac{dW}{dz} \right) dx\, dy\, dz + \Omega_h,$$

e sarà $\Omega_{W \pm h} > \Omega_W$ per qualunque h soltanto quando sia sempre:

$$\iiint \left(\frac{dW}{dx}\frac{dh}{dx} + \frac{dW}{dy}\frac{dh}{dy} + \frac{dW}{dz}\frac{dh}{dz} \right) dx\, dy\, dz = o.$$

Ora per il teorema di *Green* questo integrale può porsi sotto la forma:

$$\int h \frac{dW}{dh}\, d\sigma + \iiint h\, \Delta^2 W\, dx\, dy\, dz.$$

Poichè $h = o$ alla superficie, il 1.° termine è zero, e il secondo sarà zero per qualunque valore di h soltanto quando sia

$$\Delta^2 W = o.$$

Dunque Ω_W è un minimo quando W è una funzione che gode le proprietà dell' ennunciato del teorema, e poichè esiste sempre un minimo di Ω esisterà sempre una tal funzione. Per dimostrare che ne esiste soltanto una basterà dimostrare che esiste un sol minimo.

Supponiamo che esistano due di queste funzioni W e W' che diano un minimo per Ω, avremo:

$$W' = W + W' - W,$$

e posto:

$$W' - W = h, \quad W' = W + h,$$

W dando un minimo per Ω, avremo:

$$\Omega_{W'} = \Omega_W + \Omega_h .$$

Analogamente avremo:

$$\Omega_W = \Omega_{W'} + \Omega_h .$$

quindi:

$$\Omega_h = o,$$

ossia:

$$\iiint \left[\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = o$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dy} = o, \quad \frac{dh}{dz} = o$$

$$h = \text{cost.}$$

Ma $h = o$ sulla superficie, onde in tutto lo spazio R sarà $h = o$, e $W = W'$ come volevamo provare.

Ora se è dato il valore V del potenziale sopra una superficie S che limita uno spazio finito e connesso, lo spazio esterno alla superficie S sarà pure connesso e limitato dalla superficie e da una sfera di raggio infinito, e il potenziale P_e in questo spazio esterno sarà finito e continuo insieme colle sue derivate prime, e avrà il valore v sopra la superficie S e sarà nullo sopra la sfera di raggio infinito; quindi sarà dato sopra tutta la superficie che limita lo spazio esterno e sodisfarà inoltre alla condizione $\Delta^2 P_e = o$; quindi esisterà una funzione P_e e una soltanto che sodisfarà queste condizioni. Quanto allo spazio interno ad S che è limitato dalla sola superficie S vi sarà pure una sola funzione P_i che sarà uguale a v sopra S, e sodisfarà l'equazione:

$$\Delta^2 P_i = o,$$

quindi P_e nello spazio esterno, e P_i nell' interno che sono ambedue eguali a v sopra la superficie S, formano una funzione finita e continua in tutto lo spazio, e ponendo:

$$\frac{dP_e}{dp} - \frac{dP_i}{dp} = -4\pi\rho,$$

è chiaro che questa funzione avrà tutte le caratteristiche del potenziale della massa che ha la densità ρ sopra S e quindi è il potenziale stesso. Così dato il valore del potenziale sopra S, esso risulta completamente determinato in tutto lo spazio, e rimane pure determinata dalla precedente equazione la distribuzione della massa sopra la superficie.

IX.

Potenziale di un sistema di punti materiali sopra un altro e sopra sè stesso.

Siano dati, un sistema S di punti materiali: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ mobili liberamente, le masse dei quali siano rispettivamente: $m_1, m_2, m_3, \ldots$, e un sistema S' di altri punti materiali fissi: $p_1', p_2', p_3', \ldots$, le masse dei quali siano: $m_1', m_2', m_3', \ldots$, e i punti p_s e p_s' si attraggano o si respingano tra loro colla legge di *Newton*, secondo che il prodotto delle loro masse è positivo o negativo. Sia r_{hk} la distanza dei due punti p_h e p_k e r_{hk}' quella dei due punti p_h e p_k'; $(v_h)_1$ la velocità del punto p_h alla fine del tempo t_1, $(v_h)_0$ la velocità dello stesso punto alla fine del tempo t_0; V_h il potenziale del sistema S sopra il punto p_h, e V_h' il potenziale del sistema S' sopra il medesimo punto. Poniamo:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma_k \, m_k \, V_h = \frac{1}{2} \Sigma_k \, \Sigma_h \frac{m_k \, m_h}{r_{hk}},$$

$$W' = \Sigma_k \, m_k \, V_h' = \Sigma_k \, \Sigma_h \frac{m_k \, m_h'}{r_{kh}'}.$$

Abbiamo dalla meccanica [1] la equazione:

$$(1) \quad \tfrac{1}{2} \Sigma_h \, m_h \, (v_h)_1^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma_h \, m_h \, (v_h)_0^2 = W_1 + W_1' - W_0 - W_0',$$

distinguendo cogli apici 1 e 0 i valori corrispondenti al tempo t_1 e al tempo t_0.

La funzione W che si ottiene prendendo la semisomma dei potenziali del sistema S relativamente a tutti i suoi punti rispettivamente moltiplicati per le masse di questi punti, è il *potenziale del sistema* S *sopra sè stesso*. La funzione W'

[1] Vedi Mossotti *Lezioni di meccanica razionale*, L. 27.

che si ottiene prendendo la somma dei potenziali di S' relativi ai punti di S rispettivamente moltiplicati per le masse di questi medesimi punti, si dice il *potenziale del sistema* S' *sopra il sistema* S.

Clausius ed altri hanno dato al potenziale di un sistema sopra sè stesso il nome semplicemente di *potenziale* del sistema cui si riferisce, riserbando alla funzione che nei numeri precedenti abbiamo chiamato il potenziale, il nome datole da *Green* di *funzione potenziale*, ed anche noi in seguito adotteremo queste denominazioni.

Se denotiamo con W'' il potenziale del sistema S' sopra sè stesso, poichè questo sistema è fisso avremo:

$$W_1'' = W_0'',$$

e quindi:

$$W_1 + W_1' - W_0 - W_0' = W_1 + W_1' + W_1'' - W_0 - W_0' - W_0''.$$

Ma W + W' + W'' è il potenziale di tutto il sistema S' più S, e la quantità $W_1 + W_1' - W_0 - W_0'$ esprime il lavoro meccanico fatto dalle forze attive nel tempo $t_1 - t_0$, quindi la equazione medesima dà il seguente teorema:

L'aumento del potenziale di un sistema in un dato intervallo di tempo del suo movimento, è eguale al lavoro meccanico fatto dalle forze attive in questo intervallo, ed anche all'aumento di forza viva acquistato dal sistema in questo medesimo intervallo (1).

Determiniamo ora l'intensità delle forze colle quali più corpi di forma qualunque che si attraggono secondo la legge di *Newton*, sono sollecitati l'uno verso l'altro.

Siano: K_1, K_2, K_3... questi corpi, e V_1, V_2, V_3,... le funzioni potenziali dei medesimi relative ai punti esterni; e V_1', V_2', V_3',... le rispettive funzioni potenziali relative ai punti interni; W_1, W_2, W_3,... i potenziali di questi corpi

(1) Prendiamo la forza viva eguale alla semisomma dei quadrati delle velocità moltiplicati per le masse.

e W_{rs} il potenziale in generale del corpo K_r sopra K_s; avremo:

$$W_s = \frac{1}{2} \int V_s' \, dm_s \, .$$

$$W_{rs} = \int V_r \, dm_s = \int V_s \, dm_r \, .$$

Quindi è chiaro che il potenziale W_s sarà soltanto funzione dei parametri della superficie che limita il corpo K_s e delle costanti della funzione che esprime la densità nel medesimo; e il potenziale W_{rs} oltre ad essere funzione di questi parametri e di queste costanti, sarà funzione ancora di tre rette e di tre angoli che fissano la posizione del corpo K_r rispetto al corpo K_s.

Se prendiamo per assi delle coordinate tre assi ortogonali fissi in uno dei corpi, per esempio nel corpo K_1, e denotiamo con a_r, b_r, c_r le coordinate del centro di gravità di K_r e con ψ_r, θ_r, ϕ_r gli angoli (per esempio quelli introdotti da *Eulero*) che determinano la direzione di tre assi ortogonali fissi nel corpo K_r rispetto agli assi delle coordinate, e chiamiamo *coordinate rettilinee del corpo* K_r le quantità a_r, b_r, c_r e *coordinate angolari del corpo* K_r le quantità ψ_r, θ_r, ϕ_r è facile a vedersi che il potenziale del sistema:

$$W = \Sigma W_h + \frac{1}{2} \Sigma_h \Sigma_k W_{hk}$$

conterrà $3n - 3$ coordinate rettilinee e $3n - 3$ coordinate angolari, se n è il numero dei corpi.

Denotando con $-X_r$, $-Y_r$, $-Z_r$ le componenti della forza da applicarsi al centro di gravità di K_r e con $-H_r$, $-H_r'$, $-H_r''$ le coppie che hanno per assi rette parallelle ai tre assi delle coordinate, da applicarsi al corpo K_r, per fare equilibrio all'azione esercitata sopra il medesimo dagli altri corpi, avremo dal principio delle velocità virtuali:

$$\Sigma_h (X_h \delta a_h + Y_h \delta b_h + Z_h \delta c_h + H_h \delta p_h + H_h' \delta p_h' + H_h'' \delta p_h'') + \delta W = o$$

dalla quale esprimendo colle formule note della meccanica le rotazioni virtuali intorno ai tre assi: δp_h, $\delta p_h'$, $\delta p_h''$ in funzione di $\delta \psi_h$, $\delta \theta_h$, $\delta \varphi_h$ (¹) sarà facile ricavare i valori delle componenti delle forze: X_h, Y_h, Z_h e delle coppie H_h, H_h', H_h'' espresse per le derivate del potenziale W rispetto alle coordinate rettilinee ed angolari del corpo K_h.

Siano, per esempio, due sfere omogenee; R ed R' i loro raggi; x la distanza dei loro centri, M ed M' le loro masse; r ed r' le distanze di un punto qualunque dai loro centri; V_e e V_i le funzioni potenziali relative ai punti esterni e ai punti interni per la prima sfera, e V_e', V_i' quelle per la seconda sfera. Avremo:

$$V_e = \frac{M}{r}, \quad V_i = 2\,\pi\,R^2 - \frac{2}{3}\,\pi\,r^2,$$

$$V_e' = \frac{M'}{r}, \quad V_i' = 2\,\pi\,R'^2 - \frac{2}{3}\,\pi\,r'^2;$$

onde, denotando con W_1 il potenziale della prima sfera, con W_2 quello della seconda sfera, con W_{12} quello della prima sfera sopra la seconda e con W il potenziale delle due sfere, avremo:

$$W_1 = \frac{6\,M^2}{5\,R}, \quad W_2 = \frac{6\,M'^2}{5\,R'^2}$$

$$W_{12} = M \int \frac{d\sigma'}{r} = M\,V_e' = \frac{MM'}{x},$$

$$W = \frac{6\,M^2}{5\,R} + \frac{6\,M'^2}{5\,R'^2} + \frac{MM'}{x}.$$

Onde:

$$X_2 = \frac{MM'}{x^2}, \quad Y_2 = o, \quad Z_2 = o,$$

$$H_2 = o, \quad H_2' = o, \quad H_2'' = o.$$

(¹) Vedi Mossotti *Lezioni di meccanica razionale*, L. 24.

L' attrazione esercitata da una sfera sopra l' altra è la stessa come se le due masse fossero concentrate nei loro centri.

X.

Dello stato di equilibrio elettrico di uno o più conduttori sotto l' azione di forze elettriche qualunque.

Tutti i fenomeni della elettricità statica si spiegano ammettendo che in ogni punto materiale non elettrizzato vi siano riunite eguali quantità di due specie differenti di una materia imponderabile, una delle quali si chiama *elettricità positiva*, e l' altra *elettricità negativa;* che due particelle infinitesime di elettricità dello stesso nome si respingono con una forza direttamente proporzionale alle loro masse, e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza; che due particelle infinitesime di elettricità di nome contrario si attraggono in ragione diretta delle loro masse, e inversa dei quadrati delle loro distanze, e che la intensità della forza con cui si attraggono due particelle infinitesime situate a una certa distanza sia uguale alla intensità della forza con cui si respingono due particelle infinitesime dello stesso nome eguali alle precedenti e situate alla stessa distanza; sicchè da un punto materiale non elettrizzato che contiene la stessa quantità di elettricità delle due specie, non emana nessuna azione, nè sopra gli altri punti non elettrizzati, nè sopra l' elettricità che potrebbero trovarsi separate in altri punti dello spazio.

Quando si elettrizza un corpo con uno qualunque dei mezzi noti dalla fisica si vengono a separare l' elettricità in alcuni dei punti del medesimo e portando via una delle due elettricità, rimane in generale l' altra libera nel corpo stesso, ovvero ponendo un corpo già elettrizzato in contatto con uno non elettrizzato gli si comunica una certa quantità di elettricità. Un corpo che contiene in ogni suo punto la stessa quantità di elettricità positiva e negativa si dice allo *stato naturale*; uno invece che contiene in alcuni punti più elet-

tricità di un nome che di un altro, è *elettrizzato*, e l' eccesso di elettricità di un nome sopra quella di un altro si dice elettricità *libera.*

Un corpo in cui l' elettricità si muove liberamente obbedendo alle azioni esercitate sopra di essa, si dice *conduttore;* un corpo in cui l' elettricità, ancorchè sollecitata al moto da forze che agiscono sopra di lei, è ritenuta ferma dalla attrazione che il punto materiale dove si trova, esercita sopra di lei, si dice *coibente.* Noi considereremo i corpi come perfettamente conduttori, immersi in uno spazio perfettamente coibente.

Se sopra i punti di un corpo conduttore, sia esercitata un' azione elettrica, l' elettricità di un certo nome verrà attratta e l' altra respinta, quindi ne nascerà un moto e l'elettricità si disporrà in modo che ne nascano tali azioni da fare equilibrio all' azione esterna esercitata sul corpo, ma se il corpo è coibente non potrà nascere alcun moto e soltanto potrà accadere una specie di polarizzazione in ognuna delle sue molecole [1].

Supponiamo che in un elemento dv dello spazio si trovi tanta quantità di elettricità positiva, che se si avesse un' unità di volume pieno di elettricità positiva uniformemente distribuitavi in modo che in ogni suo elemento ve ne fosse tanta quanta in dv, la totalità dell' elettricità fosse ρ, si dice allora che la *densità* della elettricità contenuta in dv è ρ, ed è chiaro che se la quantità di elettricità contenuta in dv è dm sarà $\rho = \frac{dm}{dv}$.

Se l' elettricità dm' contenuta in dv è negativa, si dirà che la densità è $-\rho$ e avremo : $-\rho = \frac{dm'}{dv}$.

È chiaro che con queste convenzioni l' azione esercitata da una particella di elettricità sopra un punto qualunque dello spazio che si trova alla distanza r dalla medesima e

[1] Il Mossotti ha considerato questa azione sui corpi coibenti in una Memoria inserita nel Vol. XXIV. p. I. delle Memorie della *Società Italiana.*

che contiene una quantità di elettricità eguale ad uno, sarà data sempre da:

$$\rho \frac{dv}{r^2} .$$

Quindi per avere l'azione che la elettricità libera distribuita comunque in un corpo esercita sopra un punto qualunque dello spazio, basta determinare il potenziale della medesima, il quale sarà:

$$V = \int \rho \frac{dv}{r} ,$$

ed avrà le proprietà caratteristiche, che abbiamo dato nei numeri precedenti.

Sia S un sistema di corpi conduttori: K_1, K_2, K_3,... immersi in uno spazio coibente, ai quali siano compartite rispettivamente le quantità di elettricità: E_1, E_2, E_3,... Agiscano sopra il sistema S forze elettriche qualunque (che potranno emanare da corpi coibenti elettrizzati) e i punti d'onde esse emanano siano alcuni nello spazio connesso esterno a tutti i conduttori, altri nei vuoti che supporremo trovarsi in alcuni dei conduttori. Sia P la funzione potenziale di queste forze elettriche esterne al sistema.

Le elettricità libere comunicate primitivamente ai conduttori e quelle nate per la decomposizione prodotta dall'azione delle forze elettriche esterne al sistema, e dall'azione reciproca della elettricità dei conduttori, si muoveranno finchè non saranno pervenute a una tal distribuzione per cui le azioni che risultano da esse e dal potenziale P sopra un punto qualunque dei conduttori non vengano ad essere nulle e allora diremo di avere ottenuto lo *stato di equilibrio elettrico* nel sistema. Quindi in questo stato dovranno essere nulle le derivate della somma della funzione potenziale P colla funzione potenziale di tutta la elettricità del sistema, in ogni punto di ciascuno dei conduttori, e perciò la somma di queste due funzioni dovrà es-

sere eguale a una medesima costante in ogni punto del medesimo conduttore. Pertanto, se denotiamo con V_e la funzione potenziale di tutta la elettricità del sistema nello stato di equilibrio relativa allo spazio esterno a tutti i conduttori, con V_i', V_i'', V_i''', ... la medesima funzione per i punti interni ai conduttori K_1, K_2, K_3, ..., e finalmente con $V_s^{(r)}$ per uno spazio vuoto s che esista nel conduttore K_r; avremo sopra le superficie esterne dei conduttori K_r:

$$(1) \qquad V_e + P = c_r ,$$

per le superficie interne:

$$(2) \qquad V_s^{(r)} + P = c_r ,$$

in tutto il conduttore K_r:

$$(3) \qquad V_i^{(r)} + P = c_r ,$$

essendo c_1, c_2, c_3, ... tutte quantità costanti.

L'equazioni (3) danno immediatamente la funzione potenziale nell'interno dei conduttori espressa per la funzione P data, e per le quantità costanti c_r.

La funzione V_e rimane determinata dall'equazione (1) mediante il secondo teorema del §. VIII.; perchè ha le caratteristiche della funzione potenziale ed è data sopra la superficie sferica di raggio infinito, e sopra le superficie esterne dei conduttori K_r, i quali limitano compiutamente lo spazio connesso a cui si riferisce.

La funzione $V_s^{(r)}$ è determinata egualmente nello spazio vuoto s di K_r, perchè avendo le caratteristiche del potenziale, è data dalla equazione (2) sopra la superficie interna di K_r che limita questo spazio a cui essa ri riferisce.

Se denotiamo con ρ_s la densità della elettricità nel conduttore K_s, avremo:

$$\Delta^2 V_i^{(s)} = -4\pi\rho_s .$$

Ma dall' equazione (3) abbiamo:

$$\Delta^2 V_i^{(s)} + \Delta^2 P = o ,$$

e: $\Delta^2 P = o$, perchè nell' interno dei conduttori non vi sono punti d' onde emanano le forze elettriche che hanno la funzione potenziale P; quindi:

$$\Delta^2 V_i^{(s)} = o ;$$

e in conseguenza:

$$\rho_s = o ,$$

e abbiamo il seguente teorema già noto dall' esperienza:

Nello stato di equilibrio elettrico sotto l' azione di forze elettriche qualunque esterne al sistema, la elettricità si porta tutta alla superficie dei conduttori, e nell' interno di essi rimane tutta allo stato naturale.

Quindi la funzione potenziale della elettricità del sistema è potenziale di superficie, e abbiamo per ciò che dimostrammo nel §. VII. le formule seguenti per determinare le densità ρ_r, $\rho_s^{(r)}$ della elettricità che si troverà rispettivamente sopra le superficie esterne e interne di K_r:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d V_e}{d p_r} + \frac{d P}{d p_r} &= - 4 \pi \rho_r , \\ \frac{d V_s^{(r)}}{d p_s^{(r)}} + \frac{d P}{d p_s^{(r)}} &= - 4 \pi \rho_s^{(r)} . \end{aligned} \right.$$

Le costanti c_r si determineranno per mezzo delle quantità di elettricità libere, comunicate primitivamente ai conduttori, dalle equazioni:

$$(5) \qquad E_r = \int \rho_r \, d\sigma_s$$

che le conterranno linearmente nel secondo membro come vedremo in seguito e che saranno in numero eguale al numero delle incognite.

Se alcuno dei conduttori per esempio K_r fosse posto in comunicazione col suolo, la funzione potenziale V dovrebbe sopra la superficie di questo avere lo stesso valore che ha la funzione potenziale sulla superficie della terra, cioè dovrebbe esservi eguale a zero, quindi $c_r = o$, e la equazione (5) che vi si riferisce darebbe la quantità di elettricità libera che si troverebbe su questo conduttore, e per determinare le costanti c_s si avrebbe una equazione di meno e una incognita di meno.

Se in uno degli spazi vuoti nell' interno di uno dei conduttori K_r non si trova nessuno dei punti d'onde emanano forze elettriche, la funzione potenziale $V_s^r + P$ si manterrà continua in tutto questo spazio, ed essendo costante sopra la superficie che lo limita, per il teorema 4.° del §. IV, sarà costante in tutto questo spazio, quindi si avrà lo stesso valore come se questo spazio fosse ripieno di materia conduttrice, e l'azione esercitata sopra i punti del medesimo sarà nulla.

Se il sistema si riduce a un sol corpo conduttore K, e i punti d'onde emanano le azioni elettriche sono situati in uno spazio vuoto s_1 interno al medesimo, ed esso è posto in comunicazione col suolo, la funzione potenziale $V_e + P$ sarà nulla sopra la superficie esterna di K, si manterrà finita e continua in tutto lo spazio esterno, sarà nulla sopra una sfera di raggio infinito e sodisfarà l'equazione di *Laplace*, quindi per il teorema 4.° del §. IV, sarà nulla in tutto lo spazio connesso esterno a K; avremo dunque il seguente teorema:

Le azioni elettriche che emanano da punti situati in uno spazio racchiuso da un involucro conduttore posto in comunicazione col suolo, sono nulle sopra tutti i punti dello spazio esterno all' involucro.

Denotando con ρ la densità della elettricità nella superficie interna di K che limita lo spazio vuoto s_1, con V_i' la funzione potenziale della elettricità indotta nel corpo K, avremo:

$$\frac{dV_i'}{dp} + \frac{dP}{dp} = -4\pi\rho \,,$$

e quindi, essendo E' la quantità di elettricità che si trova sopra la superficie che limita s_1, si ottiene:

$$E' = \int \rho \, d\sigma = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dV_i'}{dp} \, d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int \frac{dP}{dp} \, d\sigma.$$

Ora per il teorema 1.° del §. IV, abbiamo:

$$\int \frac{dV_i'}{dp} \, d\sigma = 0$$

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{dP}{dp} \, d\sigma = E,$$

essendo E la quantità di elettricità cui sono dovute le azioni elettriche che hanno la funzione potenziale P e che si trova nello spazio s_1; sarà dunque:

$$E' = -E$$

e avremo il seguente teorema:

Se in uno spazio vuoto chiuso da un conduttore posto in comunicazione colla terra esistono più corpi elettrizzati, sopra la superficie interna del conduttore si accumulerà una quantità di elettricità libera eguale e di segno contrario a quella contenuta nei corpi elettrizzati che si trovano nell'interno.

Se i punti d'onde emanano le forze che agiscono sulla elettricità del sistema e che hanno la funzione potenziale P, appartengono al sistema stesso, cioè se alcune di queste forze emanano da alcuno dei punti interni dei conduttori, non si potrà avere uno stato di equilibrio elettrico, perchè in questo stato nell'interno di ciascun conduttore vi dev'essere un'azione nulla. Si avrà dunque un movimento continuo nella elettricità del sistema, e quando il moto sarà ridotto permanente tutta la elettricità libera sarà alla superficie dei conduttori. Infatti sia V il potenziale di tutta la elettricità libera; avremo nell'interno dei conduttori:

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho$$

indicando con ρ la densità dell' elettricità. Ora consideriamo nell' interno di un conduttore una superficie chiusa qualunque che non escendo dal conduttore non racchiude nel suo interno alcuno dei punti d' onde emanano le forze di funzione potenziale P; essendo ridotto il moto permanente, e supponendo che la quantità d' elettricità che passa attraverso ogni elemento piano dei conduttori sia proporzionale alla componente nel senso della normale a quest' elemento, poichè nello spazio racchiuso da questa superficie tanta elettricità dev' entrare quanta escirne, avremo:

$$\int \frac{dV}{dp} d\sigma = o .$$

Onde per il teorema di *Green*:

$$\int\int\int \Delta^2 V d\sigma = o,$$

quando si estenda quest' integrale triplo a tutto lo spazio connesso limitato dalla superficie qualunque considerata. Avremo dunque nell' interno de' conduttori quando si escludano i punti d' onde emanano le azioni di funzione potenziale P:

$$\Delta^2 V = o ,$$

e quindi:

$$\rho = o ,$$

come volevamo dimostrare.

Anche in questo caso, denotando con V_e e con V_i la funzione potenziale relativa ai punti esterni e interni al conduttore, con ρ la densità dell' elettricità, abbiamo:

$$\frac{dV_e}{dp} - \frac{dV_i}{dp} = -4\pi\rho .$$

XI.

Distribuzione della elettricità sopra un ellissoide.

Abbiamo dimostrato nel §. V. che la funzione potenziale di uno strato di livello è costante in tutti i punti della superficie interna dello strato, e nello spazio racchiuso dallo strato stesso, quindi sopra una superficie di un sol corpo conduttore immerso in un mezzo perfettamente coibente tutto allo stato naturale, l'elettricità si distribuirà in modo da formare uno strato di livello, perchè secondo ciò che abbiamo dimostrato nel §. VIII., vi è una sola funzione potenziale che abbia un valore dato alla superficie.

Quindi sopra un conduttore che abbia la forma di un ellissoide, la elettricità dovendo formare uno strato di livello, dovrà distribuirsi in modo che la sua densità risulti in un punto qualunque m proporzionale direttamente alla lunghezza della normale compresa tra essa e l'ellissoide omotetica infinitamente vicina. Queste porzioni di normale sono proporzionali a $(\sqrt{\Delta\lambda})_{\lambda=0}$, essendo:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 ,$$

ed a, b, c i semiassi principali dell'ellissoide.

Determiniamo ora il significato geometrico della espressione $(\sqrt{\Delta\lambda})_{\lambda=0}$ come è stato trovato dal sig. *Carlo Neumann.*

Ponendo:

$$H = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} ,$$

abbiamo:

$$\sqrt{(\Delta\lambda)}_{\lambda=0} = \frac{2}{H} .$$

Siano ora l, m, n i coseni degli angoli che la normale all' ellissoide:

$$(1) \qquad f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ,$$

fa con i tre assi; avremo:

$$l = \frac{x}{a^2}\,\frac{1}{\mathrm{H}}, \quad m = \frac{y}{b^2}\,\frac{1}{\mathrm{H}}, \quad n = \frac{z}{c^2}\,\frac{1}{\mathrm{H}} .$$

Quindi il Piano che passa per il centro ed è paralello al piano tangente avrà per equazione:

$$(2) \qquad lx + my + nz = 0 .$$

Poniamo nella equazione (1):

$$x = l\mathrm{X} + l'\mathrm{Y} + l''\mathrm{Z} , \quad \mathrm{X} = lx + my + nz ,$$
$$y = m\mathrm{X} + m'\mathrm{Y} + m''\mathrm{Z} , \quad \mathrm{Y} = l'x + m'y + n'z ,$$
$$z = n\mathrm{X} + n'\mathrm{Y} + n''\mathrm{Z} , \quad \mathrm{Z} = l''x + m''y + n''z .$$

È chiaro che il nuovo Piano delle $y\,z$ sarà il piano (2) e ponendo nell' equazione trasformata:

$$f(l\mathrm{X} + l'\mathrm{Y} + l''\mathrm{Z},\ m\mathrm{X} + m'\mathrm{Y} + m''\mathrm{Z},\ n\mathrm{X} + n'\mathrm{Y} + n''\mathrm{Z}) = 1,$$

$\mathrm{X} = 0$, avremo l' equazione della sezione nel suo stesso piano.

Perchè sia riferita ai suoi assi principali dovrà aversi:

$$f = \mathrm{L}\mathrm{X}^2 + \mathrm{M}\mathrm{Y}^2 + \mathrm{N}\mathrm{Z}^2 + 2\mathrm{P}\mathrm{X}\mathrm{Y} + 2\mathrm{Q}\mathrm{X}\mathrm{Z} = 1$$

perchè ponendo $\mathrm{X} = 0$ divenga della forma:

$$\mathrm{M}\mathrm{Y}^2 + \mathrm{N}\mathrm{Z}^2 = 1 .$$

Derivando rapporto ad Y, avremo:

$$\frac{df}{dx}l' + \frac{df}{dy}m' + \frac{df}{dz}n' = 2MY + 2PX,$$

ossia:

$$\frac{l'x}{a^2} + \frac{m'y}{b^2} + \frac{n'z}{c^2} = (Ml' + Pl)x + (Mm' + Pm)y + (Mn' + Pn)z,$$

onde:

$$(1 - Ma^2)\,l' - Pla^2 = o,$$
$$(1 - Mb^2)\,m' - Pmb^2 = o,$$
$$(1 - Mc^2)\,n' - Pnc^2 = o,$$

$$ll' + mm' + nn' = o,$$

dalle quali si deduce:

$$\frac{l^2 a^2}{1 - Ma^2} + \frac{m^2 b^2}{1 - Mb^2} + \frac{n^2 c^2}{1 - Mc^2} = o.$$

Derivando rapporto a Z si trova analogamente:

$$\frac{l^2 a^2}{1 - Na^2} + \frac{m^2 b^2}{1 - Nb^2} + \frac{n^2 c^2}{1 - Nc^2} = o.$$

Onde, M ed N sono le radici della equazione:

$$\frac{l^2 a^2}{1 - Sa^2} + \frac{m^2 b^2}{1 - Sb^2} + \frac{n^2 c^2}{1 - Sc^2} = o$$

$$l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2$$

$$- S\,[l^2 a^2 (b^2 + c^2) + m^2 b^2 (c^2 + a^2) + n^2 c^2 (a^2 + b^2)]$$

$$+ a^2 b^2 c^2 S^2 = o.$$

Ora se denotiamo con a_1 e b_1 i semiassi principali della sezione fatta dal Piano (2) nell' ellissoide, avremo:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{M}},$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Quindi l' area di questa sezione sarà:

$$\pi\, a_1\, b_1 = \frac{\pi}{\sqrt{MN}}.$$

Ma:

$$MN = \frac{l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}{a^2 b^2 c^2}$$

$$= \frac{1}{H^2 a^2 b^2 c^2},$$

onde:

$$H = \frac{a_1 b_1}{a b c}$$

e:

$$\left(\sqrt{\Delta\lambda}\right)_{\lambda=0} = \frac{2 \cdot abc}{a_1 b_1}.$$

Dunque abbiamo il seguente teorema:

Se si comunica dell' elettricità a un conduttore che abbia la forma di un ellissoide, sopra cui non agisca nessuna forza elettrica esterna, l' elettricità si distribuirà in modo che in ogni punto la sua densità sia inversamente proporzionale all' area della sezione fatta dal Piano che passa per il centro ed è parallello al Piano tangente in quel punto.

Denotando le pressioni che l'elettricità eserciterà contro il mezzo coibente in cui è immersa l'ellissoide, negli estremi degli assi a, b, c con p_a, p_b, p_c, avremo:

$$p_a : p_b : p_c = \frac{1}{b^2 c^2} : \frac{1}{c^2 a^2} : \frac{1}{a^2 b^2}$$

$$p_a : p_b : p_c = a^2 : b^2 : c^2 .$$

Quindi se $a > b > c$ ed a assai più grande di b e di c, avrémo una pressione di gran lunga superiore all'estremo dell'asse maggiore. Di qui la teorica delle punte.

XII.

Funzione di Green.

Per determinare analiticamente la funzione potenziale relativa allo stato di equilibrio elettrico di un sistema di conduttori elettrizzati, e che si trovano sotto l'azione di forze elettriche esterne qualunque, si presentano due difficoltà: una dipendente dalla forma dei conduttori, e una dalla natura del potenziale P delle forze elettriche esterne. *Green* per superare le due difficoltà separatamente ha dato un metodo, con cui si risolve la difficoltà relativa alla forma dei conduttori nel caso più semplice di P, e si fa dipendere tutti i casi in cui P ha forme qualunque più complicate dalla soluzione di questo.

Sia:

$$P = -\frac{1}{r_{mx}} ,$$

cioè consideriamo un sistema S di conduttori sotto l'azione di un punto solo m in cui vi è una quantità di elettricità eguale all'unità, e che si trova in un mezzo perfettamente coibente nello spazio esterno al sistema S. Supponiamo inoltre che tutti i conduttori del sistema S siano posti in co-

municazione colla terra. La funzione potenziale dello strato elettrico che nello stato di equilibrio avrà luogo nei conduttori del sistema sommata colla funzione potenziale $-\frac{1}{r_{mx}}$, sopra la superficie e nell' interno di ciascuno dei conduttori dovrà essere uguale a una quantità costante, e poichè questi conduttori sono posti in comunicazione col suolo, che ha la funzione potenziale uguale a zero, dovrà la costante essere eguale a zero, ossia la funzione potenziale dello strato elettrico in equilibrio delle superficie dei conduttori, dovrà essere sopra queste e nell' interno eguale ad $\frac{1}{r_{mx}}$. Denotiamo questa funzione potenziale per un punto n dello spazio esterno con $G(m, n)$. Questa funzione delle coordinate (x', y', z') di m e (x, y, z) di n che si chiama la funzione di *Green* dal nome di colui, che l' ha introdotta nella fisica matematica, è una funzione potenziale, quindi è completamente determinata per tutti i punti esterni al sistema S dalle seguenti caratteristiche:

1.° Sopra la superficie dei conduttori del sistema S è $=\frac{1}{r_{mx}}$.

2.° All' infinito s' annulla insieme colle sue derivate, essa moltiplicata per r e le sue derivate moltiplicate per r^2, convergono verso un limite finito.

3.° È finita e continua insieme colle sue derivate in tutto lo spazio in cui si considera.

4.° Sodisfa in tutto questo spazio l' equazione:

$$\Delta^2 G = o.$$

La densità ρ_{ma} che avrà l' elettricità in un punto a del sistema S sarà data dalla formula:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r_{mx}}}{dp} - \frac{d\, G(m, x)}{dp}\right)_{x=a} = 4\pi\rho_{ma}$$

e avremo per un punto interno al sistema:

$$\int \frac{\rho_{mx}\, d\sigma}{r_{nx}} = \frac{1}{r_{mn}}\ ;$$

e per un punto esterno al sistema:

$$\int \frac{\rho_{mx}\, d\sigma}{r_{nx}} = G\,(m, n)\ .$$

La funzione di *Green* è simmetrica rispetto ai punti m ed n esterni al sistema S, cioè permutando le coordinate x, y, z di n con quelle x', y', z' di m, non muta.

Infatti, dall' equazioni precedenti abbiamo:

$$\int \frac{\rho_{nx'}\, d\sigma'}{r_{ax'}} = \frac{1}{r_{an}}\ ,$$

dove a è un punto della superficie:

$$\int \frac{\rho_{mx}\, d\sigma}{r_{nx}} = G\,(m, n)\ ,$$

onde:

$$G\,(m, n) = \iint \frac{\rho_{mx}\ \rho_{nx'}\ d\sigma\, d\sigma'}{r_{xx'}}$$

e quindi non muta cangiando m in n ed n in m.

Se il punto m è interno ad uno dei corpi del sistema S essendo la superficie di S posta in comunicazione colla terra, il potenziale dell' elettricità distribuita sopra la superficie di S dovrà essere uguale ad $\frac{1}{r_{mx}}$ sopra la superficie di S e in tutto lo spazio esterno; e nello spazio interno denotandolo con $G'(m, n)$ avremo che questa funzione avrà le seguenti caratteristiche.

1.° Sarà uguale ad $\frac{1}{r_{mx}}$ sopra la superficie:

2.° Sarà finita e continua insieme con le sue derivate nello spazio interno.

3.° Sodisfarà l' equazione

$$\Delta^2 G' = o .$$

La densità ρ_{ma}' che avrà la elettricità in un punto *a* della sua superficie sarà data dalla formula:

$$\left(\frac{dG'(m, x)}{dp} - \frac{d\frac{1}{r_{mx}}}{dp}\right)_{x=a'} = 4\pi\rho_{ma}'$$

e avremo:

$$\int \frac{\rho_{mx}'\, d\sigma'}{r_{nx}} = \frac{1}{r_{mn}}$$

per un punto *n* esterno al corpo:

$$\int \frac{\rho_{mx}'\, d\sigma'}{r_{nx}} = G'(m, n)$$

per un punto *n* interno al corpo.

La funzione $G'(m, n)$ è simetrica rispetto ad *m* ed *n*; si dimostra come nel caso precedente.

Se denotiamo con Ω_{mn} il potenziale dell' elettricità indotta in un sistema di conduttori S posti in comunicazione colla terra, dalla elettricità concentrata in un punto *m* esterno al sistema S, più il potenziale di questa stessa elettricità; avremo:

$$\Omega_{mn} = G(m, n) - \frac{1}{r_{mn}}$$

per i punti *n* esterni al sistema S, ed

$$\Omega_{mn} = o$$

per tutti i punti interni al sistema, e se denotiamo con Ω_{mn} il potenziale dell' elettricità indotta nella superficie di un corpo posto in comunicazione col suolo dall' elettricità concentrata in un punto m interno ad S più il potenziale di questa stessa elettricità, avremo:

$$\Omega_{mn}' = G'(m, n) - \frac{1}{r_{mn}}$$

per i punti interni al corpo; ed:

$$\Omega_{mn}' = o$$

per i punti esterni.

Ω_{mn} è una funzione di n che in un punto m esterno ad S diviene infinita come

$$\left(- \frac{1}{r_{mn}}\right)_{m=n} .$$

Si annulla alle superficie di S, ed ha le altre caratteristiche del potenziale.

Ω_{mn}' invece diviene infinita come

$$\left(- \frac{1}{r_{mn}}\right)_{m=n}$$

in un punto m interno a un corpo K e si annulla alla superficie di K ed ha tutte le altre caratteristiche del potenziale.

XIII.

Determinazione della funzione potenziale di un sistema di conduttori elettrizzati e sotto l' azione di forze elettriche qualunque.

Abbiamo veduto nel §. XI. che per determinare lo stato di equilibrio elettrico di un sistema S di conduttori $K_1, K_2, K_3, \ldots$ ai quali siano comunicate rispettivamente le quantità di elettricità libera: $E_1, E_2, E_3, \ldots$, immersi in uno spazio coibente, alcuni dei quali possono anche essere isolati dagli altri, ma posti in comunicazione col suolo, e sopra i medesimi agiscano forze elettriche esterne che abbiano la funzione potenziale eguale a P, è necessario e sufficiente che sia determinata analiticamente la funzione V_e nello spazio connesso esterno ai conduttori e negli spazi vuoti interni ai medesimi essendo noto che essa è una funzione potenziale, e che sulle superficie di un conduttore K_s, si ha:

$$V_e = c_s - P; \tag{1}$$

le quali condizioni sono sufficienti, come si sa dal §. VIII., alla sua completa determinazione. Cominciamo dal determinare V_e nello spazio connesso esterno a tutti i conduttori, che è limitato da una sfera di raggio infinito, sopra la quale $V_e = o$, e dalle superficie esterne dei conduttori. Sia G $(e\ x)$ la funzione di *Green* relativa al sistema S, per i punti dello spazio esterno a tutti i conduttori,

$$\Omega_{ex} = - G(e\ x) + \frac{1}{r_{ex}} \tag{2}$$

$$\left(\frac{d\Omega_{ex}}{dp}\right)_{a_s} = \left(\frac{dG(e\ x)}{dp} - \frac{d\frac{1}{r_{ex}}}{dp}\right)_{a_s} = 4\pi\rho_{ea_s} \tag{3}$$

dove a_s indica un punto della superficie K_s del sistema S.

La funzione Ω_{ex} diverrà infinita come $\left(\frac{1}{r_{ex}}\right)_{x=e}$ nel punto e; si annullerà sopra le superficie di S, e avrà le altre caratteristiche del potenziale nello spazio esterno. Quindi potrà alle due funzioni V ed Ω_{ex} applicarsi il teorema di *Green*. Avremo dunque:

$$4\pi V_e = \iiint (\Omega_{ex}\, \Delta^2 V - V\, \Delta^2 \Omega_{ex})\, dx\, dy\, dz$$

$$+ \Sigma_s \int \left(V_s \frac{d\,\Omega_{ex}}{dp_s} - \Omega_{ex} \frac{d\,V_s}{dp_s}\right) d\sigma_e .$$

Ora: $\Delta^2 V = \Delta^2 \Omega_{ex} = o$ in tutto lo spazio esterno ad S, V sempre finito, ed $\Omega_{ex} = -G\,(e\,x) + \frac{1}{r_{ex}}$ è pure sempre finito anche per $x = e$; quindi avremo:

$$\iiint (\Omega_{ex}\, \Delta^2 V - V\, \Delta^2 \Omega_{ex})\, dx\, dy\, dz = o .$$

Alle superficie:

$$\Omega_{ex} = o \;;$$

dunque:

$$4\pi V_e = \Sigma_s \int V_s \frac{d\,\Omega_{ex}}{dp_s}\, d\sigma_s ,$$

e sostituendo il valore (3):

$$V_e = \Sigma_s \int V_s\, \rho_{es_s}\, d\sigma_s$$

e con i valori (1):

$$V_e = \Sigma_s\, c_s \int \rho_{es_s}\, d\sigma_s - \Sigma_s \int P_s\, \rho_{es_s}\, d\sigma_s .$$

Sostituendo il valore di ρ_{ea_s} abbiamo:

$$\int \rho_{ea_s}\, d\sigma_s = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d\,\frac{1}{r_{ex}}}{d p_s}\, d\sigma_s - \frac{1}{4\pi}\int \frac{d\,G(e\,x)}{d p_s} d\sigma_s .$$

Ma per il teorema 3.° del §. IV., essendo e esterno alla superficie di S, avremo:

$$\int \frac{d\,\frac{1}{r_{ex}}}{d p_s}\, d\sigma_s = o\,;$$

quindi prendendo la derivata rapporto a p_s in G in senso opposto sarà:

$$\int \rho_{ea_s}\, d\sigma_s = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d\,G(e\,x)}{d p_s}\, d\sigma_s$$

$$(1)\quad V_e = \frac{1}{4\pi}\,\Sigma_s\left(c_s \int \frac{d\,G(e\,x)}{d p_s}\, d\sigma_s - \int P_s \frac{d\,\Omega_{ex}}{d p_s}\, d\sigma_s\right).$$

Passiamo ora a determinare V_e nei vuoti dei conduttori K_s.

Sia V_e^s la funzione potenziale per uno di questi spazi contenuta nel conduttore K_s. Sia $G'(e\,x)$ la funzione di *Green* relativa a un punto qualunque di questo spazio dentro il quale si trovano punti d' onde emanano forze elettriche.

La funzione:

$$\Omega_{ex}' = \frac{1}{r_{ex}} - G'(e\,x)$$

si annullerà alla superficie interna di K_s, nell' interno diverrà infinita come $\frac{1}{r_{ex}}$ e del resto essa e le sue derivate si

manterranno sempre finite e continue e sodisfarà l'equazione $\Delta^2 G' = o$; quindi a V e ad Ω' potremo applicare il teorema di *Green*, e avremo nel punto *e*:

$$4\pi V_i = -\iiint (\Omega_{ex}' \Delta^2 V - V \Delta^2 \Omega_{ex}')\, dx\, dy\, dz$$

$$+\int \left(V \frac{d\,\Omega_{ex}'}{dp} - \Omega_{ex}' \frac{dV}{dp}\right) d\sigma,$$

ed essendo $\Delta^2 \Omega_{ex}' = o$ in tutto lo spazio, e $\Omega_{ex}' = o$ sulla superficie:

$$4\pi V_e{}^s = \int V \frac{d\,\Omega_{ex}}{dp}\, d\sigma;$$

ed essendo:

$$\left(\frac{d\,G'(e\,x)}{dp} - \frac{d\,\frac{1}{r_{ex}}}{dp}\right)_{x=a} = -4\pi \rho_{ea}$$

avremo:

$$(2) \qquad V_e{}^s = \int V \rho_{ea}\, d\sigma = c_s \int \rho_{ea}\, d\sigma - \int P \rho_{ea}\, d\sigma.$$

Ora sarà facile determinare analiticamente le costanti.

Per i corpi conduttori che sono in contatto col suolo le costanti c, c', c'', devono essere nulle. Le altre sono date dalle equazioni:

$$(3) \begin{cases} E_1 = \int \rho_0\, d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV_e}{dp}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int \frac{dP_i}{dp}\, d\sigma, \\ E_2 = \int \rho_1\, d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV_e}{dp}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int \frac{dP_i}{dp}\, d\sigma', \\ E_3 = \int \rho_2\, d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV_e}{dp}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int \frac{dP_i}{dp}\, d\sigma'', \end{cases}$$

quando i conduttori non hanno nel loro interno spazi vuoti d' onde emanino forze elettriche. Per un conduttore che abbia uno di questi spazi vuoti con punti d' onde emanino forze elettriche, avremo:

$$E_s = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV_e}{dp^{(s)}}\, d\sigma^{(s)} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{dP}{dp^{(s)}}\, d\sigma^{(s)}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int \frac{dP}{dp_i^{(s)}}\, d\sigma_i^{(s)} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV_e}{dp_i^{(s)}}\, d\sigma_i^{(s)}\ .$$

Ma P essendo continua tra le due superficie esterna ed interna, ed essendo: $\Delta^2 P = o$, avremo:

$$\int \frac{dP}{dp^{(s)}}\, d\sigma^{(s)} = \int \frac{dP}{dp_i^s}\, d\sigma_i^s$$

onde:

$$(4)\qquad E_s = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV_e}{dp^{(s)}}\, d\sigma^s - \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV_i^{(s)}}{dp_i^{(s)}}\, d\sigma_i^{(s)}\ .$$

Sostituendo il valore di V_e nelle equazioni (3) quando $P = o$, abbiamo:

$$E_r = -\frac{1}{4\pi}\,\Sigma c_s \iint \left(\frac{d^2 G(e\, x)}{dp_r\, dp_s} - \frac{d^2 \frac{1}{r_{ex}}}{dp_r\, dp_s} \right) d\sigma\, d\sigma'$$

dove le due derivazioni sono prese riguardando una volta come variabile il punto e e l' altra il punto x; quindi ponendo:

$$\gamma_{rs} = -\frac{1}{4\pi}\iint \left(\frac{d^2 G(e\, x)}{dp_r\, dp_s} - \frac{d^2 \frac{1}{r_{ex}}}{dp^r\, dp^s} \right) d\sigma\, d\sigma'$$

abbiamo:

$$\gamma_{rs} = \gamma_{sr} \tag{4}$$

e in conseguenza:

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma_{11} c_1 + \gamma_{12} c_2 + \gamma_{13} c_3 + \ldots \\ E_2 &= \gamma_{12} c_1 + \gamma_{22} c_2 + \gamma_{23} c_3 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

È chiaro che γ_{rs} è eguale alla quantità di elettricità libera che si trova sul conduttore K_r quando al conduttore K_s è comunicata tanta elettricità, che ponendo in comunicazione col suolo tutti i conduttori, eccettuato K_s, la funzione potenziale sopra K_s è eguale all' unità. Onde la equazione (4) dà il seguente teorema dovuto al sig. *Riemann*.

La quantità di elettricità libera che sarà sopra un conduttore K_r *quando tutti i conduttori sono in comunicazione col suolo, eccettuato* K_s, *e sopra* K_s *la funzione potenziale è eguale alla unità, è eguale a quella che sarà sopra* K_s, *quando tutti i conduttori saranno in comunicazione col suolo, eccettuato* K_r, *e sopra* K_r *la funzione potenziale sarà eguale alla unità.*

La quantità γ_{rr} di elettricità che bisogna comunicare al conduttore K_r, perchè ponendo in comunicazione col suolo tutti gli altri conduttori, la funzione potenziale abbia sopra la sua superficie il valore eguale all' unità suole chiamarsi la *capacità elettrica* di questo conduttore.

XIV.

Determinazione delle attrazioni e ripulsioni reciproche di più conduttori elettrizzati e posti in presenza uno degli altri.

Per quello che abbiamo dimostrato nel §. X, per determinare le attrazioni e ripulsioni che i conduttori elettrizzati: K_1, K_2... K_n, esercitano tra loro, basterà determinare il potenziale di tutta l'elettricità del sistema.

Sia V la funzione potenziale di tutta la elettricità del sistema nel suo stato di equilibrio, siano rispettivamente E_1, E_2... E_n le quantità di elettricità libere che si trovano sopra i corpi K_1, K_2... K_n; c_1, c_2... c_n i valori che la funzione potenziale V prende rispettivamente sopra le superficie di questi conduttori. Avremo tra le quantità c_s ed E, le relazioni (5) del §. XIII:

$$(1) \qquad E_s = c_1 \gamma_{1s} + c_2 \gamma_{2s} + \dots + c_n \gamma_{ns} ,$$

essendo:

$$(2) \qquad \gamma_{rs} = \gamma_{sr} ,$$

e le quantità γ_{rs} saranno funzioni dei parametri delle superficie e delle coordinate rettilinee ed angolari dei conduttori rispetto ad uno di essi. Il potenziale W del sistema, che si ottiene prendendo la semisomma dei valori che acquista la funzione potenziale V nei differenti punti delle superficie moltiplicati per le masse di elettricità che vi si trovano, sarà evidentemente:

$$(3) \qquad W = \tfrac{1}{2} (c_1 E_1 + c_2 E_2 + \dots + c_n E_n) .$$

Per avere la intensità F_b della forza che tende a diminuire una delle coordinate b di uno dei conduttori, avremo:

$$(4)\quad F_b = -\frac{dW}{db} = -\tfrac{1}{2}\left(E_1 \frac{dc_1}{db} + E_2 \frac{dc_2}{db} + \ldots + E_n \frac{dc_n}{db}\right).$$

Ma dall' equazione (1) abbiamo:

$$o = c_1 \frac{d\gamma_{11}}{db} + c_2 \frac{d\gamma_{12}}{db} + \ldots + c_n \frac{d\gamma_{1n}}{db} + \gamma_{11} \frac{dc_1}{db} + \gamma_{12} \frac{dc_2}{db} + \ldots + \gamma_{1n} \frac{dc_n}{db},$$

$$o = c_1 \frac{d\gamma_{12}}{db} + c_2 \frac{d\gamma_{22}}{db} + \ldots\ldots\ldots + \gamma_{22} \frac{dc_1}{db} + \ldots$$

$$o = c_1 \frac{d\gamma_{n1}}{db} + c_2 \frac{d\gamma_{n2}}{db} + \ldots\ldots\ldots + \gamma_{n1} \frac{dc_1}{db} + \ldots$$

Moltiplicando queste equazioni, la 1.ª per c_1, la 2.ª per c_2, la 3.ª per c_3 ... sommando e osservando l' equazioni (1) e (2) si ottiene:

$$\Sigma\Sigma\, c_r c_s \frac{d\gamma_{rs}}{db} = -\left(E_1 \frac{dc_1}{db} + E_2 \frac{dc_2}{db} + \ldots + E_n \frac{dc_n}{db}\right),$$

e quindi sostituendo nella equazione (4):

$$(5)\qquad F_b = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, c_r c_s \frac{d\gamma_{rs}}{db}.$$

XV.

Determinazione della distribuzione della elettricità in un conduttore di forma sferica sotto l' azione di forze elettriche qualunque.

Cominciamo dal determinare la funzione di *Green*.

Sia O il centro della sfera che prenderemo per origine delle coordinate; O A = R sia il suo raggio; e un punto esterno alla sfera, di coordinate (α, β, γ) e :

$$\xi_e^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 .$$

La funzione di *Green* deve essere una funzione dei punti x di coordinate (x, y, z) che deve mantenersi finita e continua insieme colle sue derivate in tutto lo spazio esterno alla sfera, debbono conservarsi sempre finite essa moltiplicata per il raggio vettore di x e le sue derivate moltiplicate per il quadrato di questo medesimo raggio vettore, e quando x è sopra la superficie della sfera deve divenire eguale ad $\frac{1}{r_{ex}}$, essendo:

$$r_{ex}^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 .$$

Sodisfa queste condizioni evidentemente la funzione:

$$G(e, x) = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 + \lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)}}$$

poichè per i punti m esterni alla sfera si ha:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 > o .$$

Deve inoltre sodisfare alla equazione :

$$\Delta^2 \, G(e, x) = o .$$

Ma alla G può darsi la forma:

$$G(e,x)=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{\alpha}{1+\lambda^2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{1+\lambda^2}\right)^2+\left(z-\frac{\gamma}{1+\lambda^2}\right)^2+\lambda_2{}^2\,\frac{\xi_e{}^2-(1+\lambda^2)R^2}{1+\lambda^2}}}$$

e quindi sarà sodisfatta l' equazione:

$$\Delta^2 G = o$$

prendendo:

$$\lambda^2 = \frac{\xi_e{}^2 - R^2}{R^2};$$

onde:

$$G(e, x) = \frac{R}{\xi_e\, r_{e'x}},$$

essendo:

$$r_{e'x}{}^2 = \left(x - \frac{\alpha R^2}{\xi_e{}^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta R^2}{\xi_e{}^2}\right)^2 + \left(z - \frac{\gamma R^2}{\xi_e{}^2}\right)^2.$$

Denotando con ξ_e' la distanza dall' origine del punto di coordinate $\left(\alpha\,\frac{R^2}{\xi_e{}^2},\ \beta\,\frac{R^2}{\xi_e{}^2},\ \gamma\,\frac{R_e}{\xi_e{}^2}\right)$, avremo:

$$\xi_e\,\xi_e' = R^2,$$

e quindi e' il punto reciproco ad e rispetto alla sfera: ossia e ed e' sono sullo stesso raggio vettore da una medesima parte, ed abbiamo per i punti della superficie della sfera:

$$r_{e'x} = \frac{R}{\xi_e}\, r_{ex},$$

Se denotiamo con ρ_{ex} la densità della elettricità indotta sopra la superficie della sfera, dopo che è stata posta in comunicazione colla terra, avremo:

$$\left(\frac{d\,G(e\,x)}{dr} - \frac{d\,\frac{1}{r_{ex}}}{dr}\right)_{r=R} = -4\pi\rho_{ex}$$

onde sostituendo il valore di G (e x), si ricava:

$$\rho_{ex} = \frac{\xi_e^2 - R^2}{4\pi R r_{ex}^3}.$$

Per avere la quantità della elettricità libera che si avrebbe sulla sfera, se si togliesse la comunicazione colla terra, e l' azione del punto e, osserviamo che si ha:

$$4\pi Q = 4\pi \int \rho_{ex}\, d\sigma = \int \frac{d\frac{1}{r_{ex}}}{dr}\, d\sigma - \frac{R}{\xi_e} \int \frac{d\frac{1}{r_{e'x}}}{dr}\, d\sigma = \frac{4\pi R}{\xi_e},$$

poichè il primo integrale è nullo perchè e è esterno alla sfera, e il secondo è eguale a -4π perchè e' è interno alla sfera. Avremo dunque:

$$Q = \frac{R}{\xi_e}.$$

Quindi la densità della elettricità sopra la sfera dopo che è sottratta all' azione di e, sarà:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi R \xi_e}.$$

La funzione di *Green* G' (e' x) relativa a un punto interno e' si dimostrerà analogamente essere data dalla formula:

$$G'(e'x) = \frac{R}{\xi_e' r_{ex}}.$$

La densità ρ_e' sarà:

$$4\pi \rho_e' = \left(\frac{R}{\xi_e'} \frac{d\frac{1}{r_{ex}}}{dr} - \frac{d\frac{1}{r_{e'x}}}{dr} \right)_{r=R} = \frac{R^2 - \xi_{e'}^2}{R r_{e'x}^3}.$$

La quantità Q' di elettricità sulla sfera si trova come precedentemente, ed è

$$Q' = 1.$$

Supponiamo ora che agiscano sopra la sfera forze elettriche qualunque, il potenziale delle quali sia P. Denotiamo con V_e il potenziale dell' elettricità indotta sopra la sfera, nello spazio esterno, con V_i quello nello spazio interno. Ambedue queste funzioni dovranno sommate con P essere uguali a una costante sopra la superficie della sfera, la qual costante sarà zero, se la sfera è in comunicazione col suolo.

Pertanto avremo sopra la superficie della sfera:

$$V = c - P;$$

e quindi ponendo:

$$\Omega_e = \frac{1}{r_{ex}} - \frac{R}{\xi_e r'_{ex}},$$

$$\Omega_e' = \frac{1}{r'_{ex}} - \frac{R}{\xi_e' r_{ex}},$$

avremo per quello che abbiamo dimostrato nel §. XIII:

$$V_e = \frac{1}{4\pi} \int (c - P) \frac{d\Omega_e}{dr} d\sigma = \int (c - P) \rho_e d\sigma$$

$$V_i = \frac{1}{4\pi} \int (c - P) \frac{d\Omega_e'}{dr} d\sigma = \int (c - P) \rho_e' d\sigma.$$

Ma:

$$\int \rho_e d\sigma = \frac{R}{\xi_e}, \int \rho_e' d\sigma = 1,$$

onde:

$$V_e = \frac{cR}{\xi_e} - \frac{1}{4\pi} \int P \frac{d\Omega_e}{dr} d\sigma,$$

$$V_i = c - \frac{1}{4\pi} \int P \frac{d\Omega_e'}{dr} d\sigma.$$

Ora se non vi sono forze che emanano dai punti interni alla sfera, P nell' interno è sempre finita e continua, Ω_e' vi diviene infinito come $\frac{1}{r_{e'x}}$ per $x = e$; P ed Ω_e' sodisfano le altre caratteristiche del potenziale ed Ω_e' si annulla sopra la sfera; quindi per il teorema di *Green* del §. IV:

$$P_{e'} = \frac{1}{4\pi}\int P \frac{d\Omega_e'}{dr}\, d\sigma = \int P \rho_e' d\sigma,$$

$$V_i = c - P_e' .$$

Ora osserviamo che si ha:

$$\rho_e' = \frac{R^2 - \xi_{e'}^2}{4\pi R r_{e'}^3} = \frac{R^2 - \xi_{e'}^2}{4\pi R (\xi_{e'}^2 + R^2 - 2R\xi_e'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rho_e = \frac{\xi_e^2 - R^2}{4\pi R r_e^3} = \frac{\xi_e^2 - R^2}{\frac{4\pi R^2}{\xi_e'}(R^2 + \xi_{e'}^2 - 2R\xi_e'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Poniamo:

$$P_{e'} = \frac{R^2 - \xi_{e'}^2}{4\pi R}\int \frac{P(R,\psi,\phi)\,d\sigma}{(R^2 + \xi_{e'}^2 - 2R\xi_e'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} = F(\xi_e')$$

$$P_e = \frac{\xi_e^2 - R^2}{4\pi R}\int \frac{P(R,\psi,\phi)\,d\sigma}{(R^2 + \xi_e^2 - 2R\xi_e\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\xi_e'}{R}\,\frac{R^2 - \xi_{e'}^2}{4\pi R}\int \frac{P(R,\psi,\phi)\,d\sigma}{(R^2 + \xi_{e'}^2 - 2R\xi_e'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\xi_e'}{R} F(\xi_e')$$

onde:

$$P_e = \frac{R}{\xi_e} F\left(\frac{R^2}{\xi_e}\right).$$

Quindi abbiamo:

$$V_e = \frac{R}{\xi_e}\left[c - F\left(\frac{R^2}{\xi_e}\right)\right]$$

$$V_i = c - F\ (\xi_e').$$

Ora la funzione $F\ (\xi_e')$ è data perchè è la stessa funzione $P\ (\xi_e', \psi, \phi)$ nell'interno della sfera. Quindi senza alcuna integrazione si ottiene il valore di V_e.

La densità ρ della elettricità sopra la sfera, è data dalla equazione:

$$-4\pi\rho = \left(\frac{dV_e}{d\xi_e} + \frac{dV_i}{d\xi_e'}\right)_{\xi_e' = R}.$$

Ora:

$$\frac{dV_e}{d\xi_e} = -\frac{R}{\xi_e^2}\left[c - F\left(\frac{R^2}{\xi_e}\right)\right] + \frac{R^3}{\xi_e^3} F'\left(\frac{R^2}{\xi_e}\right)$$

$$\frac{dV_i}{d\xi_e'} = -F'\ (\xi_e')$$

onde:

$$4\pi\rho = \frac{c - F(R)}{R} - 2F'(R).$$

Se la sfera è posta in comunicazione colla terra per mezzo di un filo sottilissimo e lunghissimo sarà $c = o$. Se è isolata determineremo il valore di c, nel modo seguente. Abbiamo:

$$\xi_e V_e = R\left[c - F\left(\frac{R^2}{\xi_e}\right)\right].$$

Ora:

$$\lim_{\xi_e = \infty} \xi_e V_e = Q,$$

quantità di elettricità libera che era sopra la sfera prima che vi agissero forze esterne. Quindi:

$$Q = R\,[c - F(o)] = R\,(c - P_0)$$

P_0 valore del potenziale P nel centro della sfera; quindi·

$$V_e = \frac{Q}{\xi_e} + \frac{P_0 R}{\xi_e} - \frac{R}{\xi_e}\, P\left(\frac{R^2}{\xi_e}\right)$$

$$= \frac{Q}{\xi_e} + \frac{R}{\xi_e}\left[P_0 - P\left(\frac{R^2}{\xi_e}\right)\right]$$

$$V_i = \frac{Q}{R} + P_0 - P\,(\xi_e')$$

$$= \frac{Q + P_0 R}{R} - P\,(\xi_e')\,.$$

Se P = costante:

$$V_e = \frac{Q}{\xi_e} = \frac{4\,\pi R^2 \rho}{\xi_e}$$

$$V_i = \frac{Q}{R} = 4\,\pi R\,\rho$$

come avevamo trovato altra volta.

XVI.

Coordinate dipolari.

Per determinare la distribuzione della elettricità sopra i corpi di rivoluzione, conviene adottare per coordinate i parametri di tre sistemi di superficie ortogonali, due dei quali siano di superficie di rivoluzione che abbiano per me-

ridiani due sistemi di curve piane ortogonali tra loro, e il terzo sia il sistema dei meridiani, e che ad uno di questi sistemi di superficie appartengano le superficie dei corpi per i quali si vuole determinare la distribuzione della elettricità.

Per questo sarà necessario determinare prima i due sistemi di curve ortogonali nel piano.

Siano le loro equazioni:

$$u(x, y) = u\ , \quad v(x, y) = v\ ; \tag{1}$$

dovremo avere:

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dy} = o;$$

quindi:

$$\frac{du}{dx} : \frac{dv}{dy} = -\frac{du}{dy} : \frac{dv}{dx}.$$

Quest'equazione è sodisfatta ponendo:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{dv}{dy},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dy}.$$

Moltiplicando per $i = \sqrt{-1}$ la seconda equazione e sommando si ottiene la equazione:

$$\frac{d(u+iv)}{dx} = i\frac{d(u+iv)}{dy},$$

la quale ha per integrale:

$$u + iv = f(x + iy)\ ,$$

dove f è una funzione arbitraria. Eguagliando u alla parte

reale e v alla parte imaginaria di $f(x+iy)$, abbiamo l'equazioni (1) di due sistemi di curve ortogonali.

Prendiamo:

$$u + iv = \log \frac{x + iy - a}{x + iy + a},$$

dove a è una costante arbitraria. Avremo:

$$(2) \qquad e^{u+iv} = \frac{x + iy - a}{x + iy + a};$$

onde:

$$(3) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{a \operatorname{senh} u}{\cosh u - \cos v}, \\ y = \dfrac{a \operatorname{sen} v}{\cosh u - \cos v}. \end{cases}$$

Eguagliando le parti reali e le imaginarie dei due membri della equazione (2), si ottengono le due equazioni:

$$e^u \operatorname{sen} v = \frac{2ay}{(x+a)^2 + y^2},$$

$$e^u \cos v = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{(x+a)^2 + y^2},$$

le quali divise una per l'altra danno:

$$(4) \qquad x^2 + \left(y - \frac{a}{\operatorname{tang} v}\right)^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sen} v}\right)^2.$$

L' equazione (2) può scriversi anche sotto la forma:

$$e^{-u+iv} = \frac{x - iy + a}{x - iy - a}.$$

Sommando e sottraendo questa colla equazione (2), si ottiene:

$$e^{iv} \operatorname{senh} u = -\frac{2ax}{x^2+y^2-a^2+2aiy},$$

$$e^{iv} \cosh u = \frac{x^2+y^2+a^2}{x^2+y^2-a^2+2aiy};$$

onde:

$$(5) \qquad \left(x+\frac{a}{\operatorname{tangh} u}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{senh} u}\right)^2.$$

L' equazioni (4) e (5) rappresentano due sistemi di circonferenze che s' intersecano ortogonalmente, ed i loro parametri u e v potranno prendersi per coordinate di un punto in un piano, che rimarrà determinato dalla intersezione delle due circonferenze che passano per il medesimo.

Ponendo nella equazione (4): $x = o$, $y = \pm a$, è sodisfatta. Quindi tutte le circonferenze (v) del primo sistema passano per i due punti A ed A' dell' asse delle x, che si trovano alla distanza a dall' origine, e l' asse delle x è *asse radicale* di questo sistema di circonferenze.

Denotando con R il raggio di una circonferenza (v), con d l' ordinata del suo centro, abbiamo:

$$\text{R} \operatorname{sen} v = a, \quad d \operatorname{tang} v = a.$$

Dunque v è l' angolo iscritto nel segmento di circolo (v), che ha per corda A A' e contiene il centro.

Ponendo nella equazione (5): $y = o$ $x = \pm ai$, è sodisfatta. Quindi le circonferenze del secondo sistema passano per due punti imaginari dell' asse delle y, il quale ne sarà *asse radicale*.

L' equazione (2) può scriversi anche sotto la forma:

$$e^{u-iv} = \frac{x-iy-a}{x-iy+a}.$$

Moltiplicando questa per la equazione (2), si ottiene:

$$e^u = \sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}}\,.$$

Dunque il parametro u è il logaritmo neperiamo del rapporto delle distanze di un punto qualunque di una circonferenza (u) ai due punti A ed A', che è costante per tutti i punti di ciascuna circonferenza.

I punti dell'asse delle x compresi tra A ed A' hanno la coordinata v eguale a π, per gli altri punti del medesimo asse abbiamo: $v = o$, e i punti del piano situati dalla parte delle y positive avranno v compresa tra o e π.

I punti dell'asse delle y hanno la coordinata $u = o$; il punto A che è dalla parte delle x positive ha $u = -\infty$, e il punto A' che è dalla parte delle x negative: $u = \infty$. Tutti i punti che sono dalla parte delle x positive hanno $u < o$, quelli dalla parte delle x negative $u > o$.

Il centro di una circonferenza $\mathrm{u} = \alpha$ *ha per coordinate:* $\mathrm{u} = 2\alpha$, $\mathrm{v} = \mathrm{o}$, *e il centro di una circonferenza:* $\mathrm{v} = \beta$, *ha per coordinate:* $\mathrm{u} = \mathrm{o}$, $\mathrm{v} = 2\beta$.

Infatti le coordinate rettilinee del centro della circonferenza: $u = \alpha$, sono:

$$y = o\,, \quad x = -\frac{a}{\tanh \alpha}\,.$$

Quindi dall'equazione (3), abbiamo:

$$v = o\,, \quad \frac{1}{\tanh \alpha} = \frac{\operatorname{senh} u}{\cosh u - 1} = \frac{1}{\tanh \frac{1}{2} u}\,;$$

onde:

$$v = o\,, \quad u = 2\alpha\,.$$

Le coordinate rettilinee del centro della circonferenza: $v = \beta$, sono:

$$x = o\,, \quad y = \frac{a}{\tan \beta}\,.$$

Quindi dall' equazioni (3) si deduce:

$$u = o, \quad \frac{1}{\operatorname{tang} \beta} = \frac{\operatorname{sen} v}{1 - \cos v} = \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} v};$$

onde:

$$u = o, \quad v = 2\beta.$$

Questo sistema doppio di curve ortogonali in un piano, colla rotazione intorno alla retta A A', dà origine al seguente sistema triplo di superficie che si tagliano ortogonalmente:

1.° Un sistema di sfere che hanno costante ed eguale al logaritmo neperiano di u il rapporto delle distanze dei loro punti da due punti fissi A ed A', che chiameremo i poli del sistema.

2.° Un sistema di superficie generate dalla rivoluzione intorno alla retta A A', di segmenti di circolo descritti in un piano che passa per A A', sopra la retta A A', e capaci di un angolo v.

3.° Un sistema di piani che passano per A A' e fanno con uno di essi angoli eguali a ϕ.

Le coordinate di un punto saranno i tre parametri dei tre sistemi di superficie ortogonali: u, v e ϕ, e potremo chiamarle *coordinate dipolari* col sig. *Carlo Neumann* che se n' è servito utilmente per il problema della teorica del calore, analogo a quello che passiamo a trattare nella teoria dell' elettricità statica.

Per avere tutti i punti dello spazio basterà far variare: u da $= \infty$ a $+ \infty$; v da o a π; ϕ da o a 2π.

Tra le coordinate dipolari e le rettilinee ortogonali, quando si prenda la retta A A' per asse delle x, e per origine il punto di mezzo tra A ed A', esisteranno le relazioni:

$$(6) \quad \begin{cases} X = - \dfrac{a \operatorname{senh} u}{\cosh u - \cos v}, \\[2ex] Y = \dfrac{a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} \phi}{\cosh u - \cos v}, \\[2ex] Z = \dfrac{a \operatorname{sen} v \cos \phi}{\cosh u - \cos v}. \end{cases}$$

1.° *Tra le coordinate* u, v *di un punto qualunque* m *e le coordinate* u', v' *del punto* m' *reciproco ad* m *rispetto alla sfera di equazione:* u $= \alpha$, *esistono le relazioni:*

$$v' = v\ ; \quad u + u' = 2\alpha\ .$$

Infatti, se C è il centro della sfera di equazione: $u = \alpha$, ed R il raggio della medesima, avremo:

$$Cm\ .\ Cm' = R^2\ ,$$

e se denotiamo con n il punto in cui la retta C m incontra la superficie (v) abbiamo anche:

$$Cm\ .\ Cn = R^2\ ;$$

e quindi:

$$Cm' = Cn\ ;$$

cioè il punto m' si trova sopra la superficie (v), e si ha:

$$v' = v\ ,$$

Poichè abbiamo:

$$Cm\ .\ Cm' = CA\ .\ CA'\ ,$$

saranno simili i triangoli C m A, e C m' A', ed anche i triangoli Cm A' e Cm' A, e avremo:

$$(7) \qquad \frac{mA}{m'A'} = \frac{Cm}{CA'}\ , \quad \frac{m'A}{mA'} = \frac{CA}{Cm}\ ,$$

onde:

$$\frac{mA\ .\ m'A}{mA'\ .\ m'A'} = \frac{CA}{CA'}\ ,$$

e quindi:

$$e^{u+u'} = e^{2\alpha},$$

$$u + u' = 2\alpha,$$

come volevamo dimostrare.

Denotiamo con ξ e chiamiamo *parametro del punto* m, il prodotto:

$$\xi = \sqrt{mA \,.\, mA'},$$

dove il radicale si prenderà sempre positivo. Avremo i seguenti teoremi:

2.° *I parametri* ξ *e* ξ' *di due punti* m *ed* m' *reciproci rispetto a una sfera* (u) *stanno tra loro come le radici quadrate delle distanze di questi medesimi punti dal centro* C *della sfera.*

Infatti dividendo una per l' altra l' equazione (7), abbiamo:

$$\frac{mA \,.\, mA'}{m'A \,.\, m'A'} = \frac{\xi^2}{\xi'^2} = \frac{Cm^2}{CA \,.\, CA'} = \frac{Cm}{Cm'},$$

onde:

$$\frac{\xi}{\xi'} = \frac{\sqrt{Cm}}{\sqrt{Cm'}}.$$

3.° *Le distanze di due punti reciproci rispetto ad una sfera* (u) *da un punto qualunque della medesima stanno tra loro come i rispettivi parametri.*

Infatti, essendo m ed m' i due punti reciproci ed S un punto della sfera, abbiamo:

$$\frac{\xi}{\xi'} = \frac{\sqrt{Cm}}{\sqrt{Cm'}} = \frac{R}{Cm'} = \frac{Cm}{R} = \frac{Sm}{Sm'},$$

poichè sono simili i due triangoli: SmC e $Cm'S$.

Il parametro ξ si esprime facilmente in funzione delle coordinate u e v del punto m al quale appartiene; poichè abbiamo:

$$mA = \sqrt{(x-a)^2+y^2} = \frac{a\sqrt{2\,e^u}}{\sqrt{\cosh u - \cos v}}$$

$$mA' = \sqrt{(x+a)^2+y^2} = \frac{a\sqrt{2\,e^{-u}}}{\sqrt{\cosh v - \cos v}}$$

onde:

$$\xi = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh u - \cos v}}. \tag{8}$$

Trasformiamo ora la equazione di *Laplace* in coordinate dipolari. È noto che essendo u, v e ϕ un sistema di coordinate curvilinee ortogonali, se poniamo:

$$\frac{1}{h_1^2} = \frac{dx^2}{du^2} + \frac{dy^2}{du^2} + \frac{dz^2}{du^2},$$

$$\frac{1}{h_2^2} = \frac{dx^2}{dv^2} + \frac{dy^2}{dv^2} + \frac{dz^2}{dv^2},$$

$$\frac{1}{h_3^2} = \frac{dx^2}{d\phi^2} + \frac{dy^2}{d\phi^2} + \frac{dz^2}{d\phi^2},$$

avremo:

$$\Delta^2 V = h_1h_2h_3\left[\frac{d}{du}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{dV}{du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{h_2}{h_1h_3}\frac{dV}{dv}\right) + \frac{d}{d\phi}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{dV}{d\phi}\right)\right].$$

Ora dall' equazione (6) si ricava:

$$h_1 = \frac{\cosh u - \cos v}{a} = \frac{2a}{\xi^2},$$

$$h_2 = \frac{\cosh u - \cos v}{a} = \frac{2a}{\xi^2},$$

$$h_3 = \frac{\cosh u - \cos v}{a \operatorname{sen} v} = \frac{2a}{\xi^2 \operatorname{sen} v};$$

onde la equazione: $\Delta^2 V = o$, diviene:

$$\frac{d\,\xi^2 \frac{dV}{du}}{du} + \frac{d\,\xi^2 \operatorname{sen} v \frac{dV}{dv}}{\operatorname{sen} v\, d v} + \frac{\xi^2}{\operatorname{sen}^2 v} \frac{d^2 V}{d\phi} = o,$$

ossia:

$$(9) \qquad \xi\left(\frac{d^2 \xi V}{du} + \frac{d^2 \xi V}{dv^2} + \cot v \frac{d\xi V}{dv} - \tfrac{1}{4}\xi V\right)$$

$$- \xi V \left(\frac{d^2 \xi}{du^2} + \frac{d^2 \xi}{dv^2} + \cot v \frac{d\xi}{dv} - \tfrac{1}{4}\xi\right) = o.$$

Ma è facile a verificarsi che essendo:

$$(10) \qquad \xi_b = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh(u+b) - \cos v}},$$

si ha identicamente:

$$(11) \qquad \frac{d^2 \xi_b}{du^2} + \frac{d^2 \xi_b}{dv^2} + \cot v \frac{d\xi_b}{dv} - \tfrac{1}{4}\xi_b = o,$$

qualunque sia b. Onde la equazione (10) diviene:

$$(12) \qquad \frac{d^2 \xi V}{du^2} + \frac{d^2 \xi V}{dv^2} + \cot v \frac{d\xi V}{dv} - \tfrac{1}{4}\xi V = o.$$

Ponendo nella equazione (12):

$$V = \frac{\xi_b}{\xi},$$

ed osservando la equazione (11), si vede che rimane sodisfatta. Quindi:

$$(13) \qquad \Delta \frac{\xi_b}{\xi} = o.$$

Ora $\frac{\xi_b}{\xi}$ è una funzione finita e continua per tutti i valori di u e di v fuori che quando è $u = -b$, $v = o$, cioè è finita e continua in tutti i punti dello spazio fuori che in un punto della retta che unisce i poli. In questo punto diviene infinita, e denotando con r la distanza dei due punti di coordinate (u, v, ϕ) e $(-b, o, o)$ abbiamo:

$$\text{(14)} \qquad \lim r \frac{\xi_b}{\xi} = \frac{a}{\operatorname{senh} \frac{b}{2}} .$$

Infatti, abbiamo:

$$r = \frac{a \operatorname{senh} \frac{u}{2}}{\operatorname{senh} \frac{b}{2}\left(\operatorname{senh}^2 \frac{u}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{v}{2}\right)}$$

$$\sqrt{\operatorname{senh}^2\left(\frac{u+b}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\frac{v}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2\frac{v}{2}}{\operatorname{senh}^2\frac{u}{2}}\left[\operatorname{sen}^2\frac{v}{2} + \operatorname{senh}^2\frac{b}{2} - \operatorname{senh}^2\frac{u}{2} + 2\cosh\frac{b}{2}\operatorname{senh}\frac{u}{2}\operatorname{senh}\left(\frac{u+b}{2}\right)\right]}$$

$$\frac{\xi_b}{\xi} = \frac{\sqrt{\operatorname{senh}^2 \frac{u}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{v}{2}}}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 \frac{(u+b)}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{v}{2}}} ;$$

onde:

$$r \frac{\xi_b}{\xi} = \frac{a \operatorname{senh} \frac{u}{2}}{\operatorname{senh} \frac{b}{2} \sqrt{\operatorname{senh}^2 \frac{u}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{v}{2}}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen}^2\frac{v}{2} + \operatorname{senh}^2\frac{b}{2} - \operatorname{senh}^2\frac{u}{2} + 2\cosh\frac{b}{2}\operatorname{senh}\frac{u}{2}\operatorname{senh}\frac{u+b}{2}}{\left(1 + \frac{\operatorname{senh}^2\frac{u+b}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{v}{2}}\right)\operatorname{senh}^2\frac{u}{2}}},$$

e quindi passando al limite per $u = -b$, $v = o$, $r = o$, si ottiene la equazione (14).

Pertanto abbiamo il seguente teorema:

4.° *La funzione* $\frac{\xi_b}{\xi}$ *è finita e continua in tutto lo spazio fuori che nel punto di coordinate* (— b, o, o), *dove diviene infinita come* $\frac{a}{r \operatorname{senh} \frac{b}{2}}$, *e sodisfa alla equazione di* Laplace.

Le sfere del sistema (u) non possono intersecarsi nè essere tangenti tra loro, ma incontrano tutte l' asse polare tra i due poli A ed A'; quindi col diminuire della distanza $2a$ dei due poli tutte le sfere si avvicinano tra loro finchè per $a = o$ divengono tutte tangenti. Ma quando $a = o$, anche u e v divengono eguali a zero, e tutte le formule dimostrate fin qui risultano indeterminate. Affinchè sia possibile di trattare anche il caso in cui due sfere del sistema (u) siano tangenti tra loro, bisognerà prendere per coordinate invece dei parametri u e v due altri parametri dei due sistemi di superficie (u) e (v), i quali non si annullino quando $a = o$.

Prenderemo per parametro variabile del sistema di sfere (u) la quantità μ a cui sono eguali le lunghezze inverse delle tangenti alla sfera di raggio a col centro nella metà della retta A A' condotte dal punto dove la sfera (u) incontra nel punto non compreso tra A ed A' l' asse polare A A'. È facile a vedersi che tra u e μ avremo la relazione:

$$\mu = \frac{\operatorname{senh} \frac{u}{2}}{a} \tag{15}$$

Prenderemo per parametro variabile del sistema di superficie (v) le quantità ν a cui sono eguali le inverse delle distanze di un polo da uno dei punti d' intersezione colle superficie (v) del piano normale ad A A' che passa per la metà di A A'. È chiaro che avremo:

$$\nu = \frac{\operatorname{sen} \frac{v}{2}}{a} . \tag{16}$$

Quando $a = o$ le quantità μ divengono eguali alle lunghezze inverse dei diametri delle sfere (u) tutte tangenti tra loro nel punto di mezzo di AA', e le quantità ν divengono eguali alle lunghezze inverse dei diametri delle circonferenze generatrici delle superficie (v).

Abbiamo allora:

$$\cosh \frac{u}{2} = \sqrt{1 + a^2 \mu^2} = 1$$

$$\cos \frac{v}{2} = \sqrt{1 - a^2 \nu^2} = 1$$

$$(16) \quad \frac{\operatorname{senh} \frac{u + u'}{2}}{a} = \frac{\operatorname{senh} \frac{u}{2} \cosh \frac{u'}{2}}{a} + \frac{\operatorname{senh} \frac{u'}{2} \cosh \frac{u}{2}}{a} = \mu + \mu'.$$

$$(17) \quad \frac{\operatorname{sen} \frac{v + v}{2}}{a} = \frac{\operatorname{sen} \frac{v}{2}}{a} \cos \frac{v'}{2} + \frac{\operatorname{sen} \frac{v'}{v}}{a} \cos \frac{v}{2} = \nu + \nu'.$$

XVII.

Determinazione della funzione di Green *per due sfere.*

Siano C e C′ i centri di due sfere esterne una all' altra, le quali abbiano rispettivamente i raggi R ed R′, e sia δ la distanza C C′ dei loro centri. Conduciamo un piano per la retta C C′, e l' asse radicale O O′ delle due circonferenze secondo le quali questo piano interseca le due sfere. Dal punto O in cui l' asse radicale incontra la retta C C′, si conducano le due tangenti, che supporremo di lunghezza eguale ad a, alle due circonferenze, e si descriva col centro in O, e con un raggio eguale ad a una circonferenza che incontrerà la retta C C′ in due punti A ed A′. Prendiamo questi due punti per poli di un sistema di coordinate *dipolari* e conserviamo tutte le notazioni del numero precedente.

È chiaro che l' equazioni delle due sfere date saranno:

$$u = \alpha, \qquad u = \alpha',$$

essendo α ed α' di segno contrario, perchè le due sfere sono dalle parti opposte dell' asse radicale.

Per determinare le quantità α, α' e la distanza $2a$ dei due poli, in funzione dei raggi R ed R′ delle due sfere e della distanza δ dei loro centri, osserviamo che si hanno le relazioni:

$$R \operatorname{senh} \alpha = a, \qquad R' \operatorname{senh} \alpha' = -a,$$

$$R \cosh \alpha + R' \cosh \alpha' = \delta;$$

dalle quali si deduce:

$$(1) \quad \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{(R^2 + R'^2 - \delta^2)^2 - 4R^2R'^2}}{2\delta}, \\[2ex] \operatorname{senh} \alpha = \dfrac{a}{R}, \quad \operatorname{senh} \alpha' = -\dfrac{a}{R'}. \end{cases}$$

Per determinare la funzione di *Green*: G (e, x) per le due sfere, relativa a un punto e esterno ad ambedue, basterà costruirne una che ne abbia tutte le caratteristiche.

È noto, che indicando con $r_{\beta x}$ la distanza di due punti β ed x; se il punto β è interno alla sfera (α), e con $r_{\beta' x}$ la distanza di due punti β' ed x, se β' è interno alla sfera (α'), la funzione:

$$\frac{A_\beta}{r_{\beta x}} + \frac{A_{\beta'}}{r_{\beta' x}}$$

sodisfa alla equazione di *Laplace* in tutto lo spazio esterno alle due sfere. In questo spazio il punto x non potendo mai coincidere con β e con β', la funzione vi si manterrà sempre finita e continua. Coll' allontanarsi all' infinito del punto x, essa moltiplicata per $r_{\gamma x}$, e le sue derivate prime mol-

tiplicate per $r^2{}_{\gamma x}$ convergeranno verso quantità finite. Una somma di un numero qualunque di queste funzioni goderà delle medesime proprietà, ma se il loro numero è infinito, la serie che avremo dovrà anche essere convergente.

Prendiamo dunque:

$$G(e\,x) = \sum_0^\infty {}_s \left(\frac{A_s}{r_{sx}} + \frac{A_s'}{r_{s'x}} \right), \tag{2}$$

i primi termini riferendosi a punti e_s interni alla sfera (α), i secondi a punti e_s' interni alla sfera (α'), e determiniamo questi punti e i coefficienti A_s ed A_s' in modo che sia sodisfatta l'altra caratteristica della funzione di *Green*.

Quando il punto x è sopra la sfera (α) dovrà aversi:

$$G(e\,\alpha) = \frac{1}{r_{e\alpha}}, \tag{3}$$

denotando con $r_{e\alpha}$ la distanza del punto e da un punto della sfera (α), e quando il punto x è sopra la sfera (α') dovrà aversi:

$$G(e\,\alpha') = \frac{1}{r_{e\alpha'}}. \tag{4}$$

Le due equazioni (3) e (4) saranno verificate, quando si abbia:

$$\frac{A_0}{r_{o\alpha}} = \frac{1}{r_{e\alpha}}, \quad \frac{A_s'}{r_{s'\alpha}} + \frac{A_{s+1}}{r_{(s+1)\alpha}} = 0,$$

$$\frac{A_0'}{r_{o'\alpha'}} = \frac{1}{r_{e\alpha'}}, \quad \frac{A_s}{r_{s\alpha'}} + \frac{A_{(s+1)'}}{r_{(s+1)'\alpha'}} = 0.$$

Dal teorema 3.° del numero precedente si deduce che queste equazioni sono sodisfatte se prendiamo:

$$A_s = (-1)^s \frac{\xi_s}{\xi}, \quad A_s' = (-1)^s \frac{\xi_s'}{\xi}, \tag{5}$$

denotando ξ, ξ_s e ξ_s' rispettivamente i parametri dei punti

e, e_s, e_s' ed essendo il punto e_s' reciproco ad e_{s+1} rispetto alla sfera (α), il punto e_s reciproco ad $e_{(s+1)}'$ rispetto alla sfera (α'), il punto e reciproco ad e_0 rispetto alla sfera (α) e ad e_0' rispetto alla sfera (α').

I punti e_s ed e_s' si ottengono nel modo seguente: conduciamo le due rette C_e e C'_e; il punto in cui C_e incontra la superficie (v) che passa per e sarà e_0 il punto in cui C'_e incontra la medesima superficie sarà e_0': conduciamo $C_{e'_0}$ e C'_{e_0}; il punto in cui $C_{e'_0}$ incontra (v) sarà e_1, quello in cui C'_{e_0} incontra (v) sarà e_1'; conduciamo $C_{e'_1}$ e C'_{e_1}; il punto in cui $C_{e'_1}$ incontra (v) sarà e_2, quello in cui $C_{e'_1}$ incontra (v) sarà e_2', e così seguitando indefinitamente. È chiaro che i punti e_s ed e_s' vanno indefinitamente avvicinandosi all'asse polare, e quindi i loro parametri ξ_s e ξ_s' vanno decrescendo indefinitamente. Dunque se poniamo nel secondo membro della formula (2) i valori (5) avremo una serie con i termini alternativamente positivi e negativi indefinitamente decrescenti, e quindi convergente.

Pertanto la funzione:

$$G\,(e\,x) = \frac{1}{\xi}\sum_0^\infty (-1)^s\left(\frac{\xi_s}{r_{sx}} + \frac{\xi_s'}{r_s'{}_x}\right) \tag{6}$$

avrà tutte le caratteristiche della funzione di *Green* per le due sfere (α) ed (α') relativa a un punto esterno e, e sarà questa funzione stessa.

La densità ρ_e della elettricità indotta sopra la sfera (α) dalla elettricità eguale ad uno contenuta nel punto e, sarà data dalla equazione:

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\,G\,(e\,x)}{d\,r} - \frac{d\,\frac{1}{r_{ex}}}{d\,r}\right)_{r=R}$$

dove r è il raggio vettore del punto x, condotto da C. Sostituendo il valore (6) abbiamo:

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\xi}\sum_0^\infty(-1)^s\left(\xi_s\,\frac{d\,\frac{1}{r_{sx}}}{dr} + \xi_s'\,\frac{d\,\frac{1}{r_{sx}'}}{dr}\right) - \frac{d\,\frac{1}{r_{ex}}}{dr}\right)_{r=R}.$$

Se denotiamo con Q la quantità della elettricità sopra la sfera (α), avremo:

$$Q = \int \rho_0 \, d\sigma$$

dove l'integrale deve estendersi a tutta la sfera. Ma per il teorema 3.° del §. IV, essendo i punti e ed e_s' esterni ed i punti e_s interni alla sfera (α), abbiamo:

$$\int \frac{d\frac{1}{r_{ex}}}{dr} d\sigma = o, \quad \int \frac{d\frac{1}{r_s'{}_x}}{dr} d\sigma = o, \quad \int \frac{d\frac{1}{r_{sx}}}{dr} d\sigma = 4\pi,$$

onde:

$$Q = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{\xi_s}{\xi}. \tag{7}$$

Analogamente, denotando con Q' la quantità di elettricità sopra la sfera (α'), avremo:

$$Q' = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{\xi_s'}{\xi}. \tag{8}$$

Restano ora a determinarsi i parametri $\xi_s \, \xi_s'$ in funzione delle coordinate u e v del punto e e delle costanti α, α' ed a.

Per questo basta osservare che essendo i punti e_s' ed e_{s+1} reciproci rispetto alla sfera (α) ed e_s e e'_{s+1} reciproci rispetto ad (α'), abbiamo per il teorema 1.° del numero precedente, se denotiamo con $u_s \, v_s$ le coordinate di e_s, e con $u_s' \, v_s'$ le coordinate di e_s':

$$v_s = v_s' = v$$

$$u + u_0 = 2\alpha, \qquad u + u_0' = 2\alpha'$$

$$u_s' + u_{s+1} = 2\alpha, \qquad u_s + u'_{s+1} = 2\alpha',$$

onde, ponendo:

$$(9) \qquad \alpha - \alpha' = \varpi ,$$

avremo:

$$(10) \quad \begin{cases} u_{2s} = \;\; 2s\varpi + 2\alpha - u , & u_{2s-1} = \;\; 2s\varpi + u \\ u_{2s}' = -2s\varpi + 2\alpha' - u , & u'_{2s-1} = -2s\varpi + u \end{cases}$$

e quindi:

$$(11) \quad \begin{cases} \xi_{2s} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh(2s\varpi + 2\alpha - u) - \cos v}} , \\ \xi_{2s-1} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh\,(2s\varpi + u) - \cos v}} , \\ \xi_{2s}' = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh(2s\varpi - 2\alpha' + u) - \cos v}} , \\ \xi'_{2s-1} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh\,(2s\varpi - u) - \cos v}} . \end{cases}$$

XVIII.

Distribuzione della elettricità sopra due conduttori di forma sferica in presenza uno dell' altro.

Supponiamo che sopra la elettricità libera e allo stato naturale di due conduttori di forma sferica agiscano forze elettriche qualunque, e sia P la funzione potenziale delle medesime. Denotiamo con V_e la funzione potenziale dello stato elettrico indotto da queste forze sopra i due conduttori, relativa ad un punto qualunque e esterno ad ambedue, con V_i e con V_i' le funzioni potenziali di questo medesimo stato elettrico relative rispettivamente ai punti i interni alla prima e ai punti i' interni alla seconda sfera.

Sia: $u = \alpha$ l'equazione della prima, ed $u = \alpha'$ la equazione della seconda sfera. Sopra la superficie (α) dovrà aversi:

$$V_e = V_i = c - P\,,$$

e sopra la superficie (α'):

$$V_e = V_i' = c' - P\,,$$

dove c e c' indicano due costanti:

Se nell' interno dei due conduttori non si trova alcuno dei punti d' onde emanano le forze elettriche che hanno la funzione potenziale P, sarà in tutto lo spazio racchiuso dalla superficie (α):

$$V_i = c - P\,, \tag{1}$$

e in tutto lo spazio racchiuso dalla superficie (α'):

$$V_i' = c' - P\,. \tag{2}$$

Per la funzione potenziale V_e relativa ai punti esterni, avremo sempre per ciò che abbiamo dimostrato nel §. 13:

$$4\pi\, V_e = \int (c - P)\, \rho_e\, d\sigma + \int (c' - P)\, \rho_e'\, d\sigma'\,, \tag{3}$$

dove il primo integrale deve estendersi a tutta la superficie (α), il secondo a tutta la superficie (α').

Ora dal numero precedente abbiamo:

$$\int \rho_e\, d\sigma = Q = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{\xi_s}{\xi}\,,$$

$$\int \rho_e'\, d\sigma' = Q' = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{\xi_s'}{\xi}\,,$$

onde:

$$(4)\qquad V_0 = c\,Q + c'\,Q' - \int P\,\rho_0\,d\sigma - \int P\,\rho_0'\,d\sigma'.$$

Consideriamo il caso in cui non esistano forze elettriche esterne, cioè supponiamo:

$$P = o,$$

e che soltanto siano state comunicate ai due conduttori prima di porli in presenza, al primo la quantità E, al secondo la quantità E′ di elettricità. In questo caso avremo:

$$(5)\qquad V_0 = c\,Q + c'\,Q' = c\sum_0^\infty (-1)\frac{\xi_s}{\xi} + c'\sum_0^\infty (-1)^s\frac{\xi_s'}{\xi}$$

$$V_i = c,\ V_i' = c'.$$

Denotiamo con ρ la densità della elettricità sopra la superficie (α) e con ρ' quella della superficie (α'), osservando la relazione:

$$\frac{d}{dp} = h\,\frac{d}{du}\ (^1)$$

avremo:

$$\begin{cases} \rho = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{dV_0}{dp} = -\dfrac{1}{4\pi}\left(c\dfrac{dQ}{dp} + c'\dfrac{dQ'}{dp}\right) = -\dfrac{1}{4\pi a}(\cosh\alpha - \cos v)\left(c\dfrac{dQ}{du} + c'\dfrac{dQ'}{du}\right)_{u=\alpha} \\ \rho' = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{dV_0}{dp} = -\dfrac{1}{4\pi}\left(c\dfrac{dQ}{dp'} + c'\dfrac{dQ'}{dp'}\right) = -\dfrac{1}{4\pi a}(\cosh\alpha' - \cos v)\left(c\dfrac{dQ}{du} + c'\dfrac{dQ'}{du}\right)_{u=\alpha'}. \end{cases}$$

(1) Vedi Lamé. *Leçons sur les coordonnées curvilignes.* L. I.

Per determinare le costanti c e c' osserviamo che le quantità E ed E' di elettricità libera sopra le due sfere sono date dalle due equazioni:

$$E = \int \rho \, d\sigma = -\frac{c}{4\pi}\int \frac{dQ}{dp}\, d\sigma - \frac{c'}{4\pi}\int \frac{dQ'}{dp}\, d\sigma,$$

$$E' = \int \rho' \, d\sigma' = -\frac{c}{4\pi}\int \frac{dQ}{dp'}\, d\sigma' - \frac{c'}{4\pi}\int \frac{dQ'}{dp'}\, d\sigma',$$

e si ha:

$$Q = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{\xi_s}{\xi} = \sqrt{(\cosh u - \cos v)}\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\cosh(2s\varpi + 2\alpha - u) - \cos v}}\right.$$

$$\left. - \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\cosh(2s\varpi + u) - \cos v}}\right)$$

$$Q' = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{\xi_s'}{\xi} = \sqrt{(\cosh u - \cos v)}\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\cosh(2s\varpi - 2\alpha' + u) - \cos v}}\right.$$

$$\left. - \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\cosh(2s\varpi - u) - \cos v}}\right)$$

Quindi per il teorema 4.° del §. 16, sarà:

$$\Delta^2 Q = o,$$

e Q si conserverà finita e continua in tutto lo spazio interno alla sfera (α) fuori che nei punti di coordinate:

$$v = o, \quad u = 2s\varpi + 2\alpha$$

nei quali diverrà infinita come:

$$\frac{a}{r \operatorname{senh}(s\varpi + \alpha)}.$$

Dunque per il teorema 2.° del §. IV. avremo:

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{dQ}{dp}\,d\sigma = -a\sum_0^\infty\frac{1}{\operatorname{senh}(s\varpi+\alpha)}.$$

Analogamente, si trova:

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{dQ}{dp'}\,d\sigma' = a\sum_1^\infty\frac{1}{\operatorname{senh} s\varpi},$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{dQ'}{dp}\,d\sigma = a\sum_1^\infty\frac{1}{\operatorname{senh} s\varpi},$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{dQ'}{dp'}\,d\sigma' = -a\sum_0^\infty\frac{1}{\operatorname{senh}(s\varpi-\alpha')}$$

e quindi per determinare c e c' si hanno le due equazioni:

$$(7)\quad\begin{cases} E = c\,a\sum_0^\infty\dfrac{1}{\operatorname{senh}(s\varpi+\alpha)} - c'a\sum_1^\infty\dfrac{1}{\operatorname{senh} s\varpi}, \\[2ex] E' = -c\,a\sum_1^\infty\dfrac{1}{\operatorname{senh} s\varpi} + c'a\sum_0^\infty\dfrac{1}{\operatorname{senh}(s\varpi-\alpha')}; \end{cases}$$

e ponendo:

$$(8)\qquad a\sum_0^\infty\frac{1}{\operatorname{senh}(s\varpi+\alpha)} = \gamma_{11},\quad a\sum_1^\infty\frac{1}{\operatorname{senh} s\varpi} = -\gamma_{12}$$

$$a\sum_0^\infty\frac{1}{\operatorname{senh}(s\varpi-\alpha')} = \gamma_{22},\quad D = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$$

si ottiene:

$$(9)\qquad c = \frac{\gamma_{22}E - \gamma_{12}E'}{D},\quad c' = \frac{\gamma_{11}E' - \gamma_{12}E}{D}.$$

Se i duè conduttori sferici in presenza uno dell' altro sono riuniti per mezzo di un filo conduttore sottilissimo, la funzioue potenziale sulle due superficie avrà lo stesso valore e quindi:

$$c = c' ,$$

e la differenza Δ delle elettricità libere dei due conduttori sarà:

$$\Delta = \mathrm{E} - \mathrm{E}' .$$

Quindi avremo:

$$\Delta = ca\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\mathrm{senh}\,(s\varpi + \alpha)} - \sum_0^\infty \frac{1}{\mathrm{senh}\,(s\,\varpi - \alpha')}\right),$$

ed essendo:

$$\varpi = \alpha - \alpha' ,$$

$$\Delta = ca \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{senh}\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} + (2s + 1)\,\frac{\varpi}{2}\right)} .$$

Poniamo :

$$\mathrm{F}\,(z,\, \varpi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{senh}\left[x + (2s + 1)\,\frac{\varpi}{2}\right]} .$$

Questa funzione monodroma ha evidentemente per radici tutte le quantità della forma:

$$m\varpi + n\pi i,$$

e per infiniti tutte e sole le quantità della forma:

$$(2m + 1)\,\frac{\varpi}{2} + n\pi i .$$

Dunque ha i soli infiniti e tutte le radici della funzione ellittica:

$$\frac{\mathrm{sn}(z, k)}{\mathrm{cn}(z, k)},$$

dove:

$$k = 4\sqrt{q}\,\mathop{\mathrm{P}}_{1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n+1}}\right)^{4},$$

(10)

$$q = e^{\frac{-\pi^2}{\varpi}}.$$

Avremo dunque:

$$\mathrm{F}(z, \varpi) = \phi(z)\frac{\mathrm{sn}(z, k)}{\mathrm{cn}(z, k)},$$

dove $\phi(z)$ è una funzione intera:

Ora abbiamo:

$$\mathrm{F}(z+\varpi, \varpi) = \mathrm{F}(z, \varpi) = \phi(z+\varpi)\frac{\mathrm{sn}(z, k)}{\mathrm{cn}(z, k)},$$

$$\mathrm{F}(z+\pi i, \varpi) = -\mathrm{F}(z, \varpi) = -\phi(z+\pi i)\frac{\mathrm{sn}(z, k)}{\mathrm{cn}(z, k)};$$

onde:

$$\phi(z+\varpi) = \phi(z),$$

$$\phi(z+\pi i) = \phi(z),$$

e quindi:

$$\phi(z) = \mathrm{C},$$

$$\mathrm{F}(z, \varpi) = \mathrm{C}\frac{\mathrm{sn}(z, k)}{\mathrm{cn}(z, k)}.$$

Moltiplicando da ambedue le parti per senh $\left(z-\frac{\varpi}{2}\right)$ e passando al limite per $z=\frac{\varpi}{2}$ si ottiene:

$$1=\lim_{z=\frac{\varpi}{2}}\frac{\mathrm{C}\,\mathrm{senh}\left(z-\frac{\varpi}{2}\right)}{\mathrm{cn}\,(z,\,k)}\,\mathrm{sn}\,(z,k)=-\frac{\mathrm{C}}{dn\left(\frac{\varpi}{2},\,k\right)}=-\frac{\mathrm{C}}{k'},$$

$$\mathrm{C}=-k',$$

$$\mathrm{F}\,(z,\,\varpi)=-k'\frac{\mathrm{sn}\,(z,\,k)}{\mathrm{cn}\,(z,\,k)}\,.$$

Onde:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{senh}\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}+(2s+1)\frac{\varpi}{2}\right)}=-k'\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2},\,k\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2},\,k\right)},$$

e quindi:

$$\Delta=-\frac{cak'\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2},\,k\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2},\,k\right)}\,. \tag{11}$$

Consideriamo ora i valori della funzione potenziale V_e data dalla equazione (5) per i punti che si trovano sulla linea che unisce i centri delle due sfere.

Per i punti di questa linea che si trovano tra le due sfere, abbiamo:

$$v=\pi\;;$$

onde l' equazioni (11) del numero precedente daranno:

$$\xi_{2s} = \frac{a\sqrt{2}}{\cosh\left(s\varpi + \alpha - \frac{u}{2}\right)}$$

$$\xi_{2s-1} = \frac{a\sqrt{2}}{\cosh\left(s\varpi + \frac{u}{2}\right)}$$

$$\xi_{2s}' = \frac{a\sqrt{2}}{\cosh\left(s\varpi - \alpha' + \frac{u}{2}\right)}$$

$$\xi'_{2s-1} = \frac{a\sqrt{2}}{\cosh\left(s\varpi - \frac{u}{2}\right)}$$

e quindi:

$$(12)\quad V_0 = \cosh\frac{u}{2}\left[c\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\cosh\left(s\varpi + \alpha - \frac{u}{2}\right)} - \sum_1^\infty \frac{1}{\cosh\left(s\varpi + \frac{u}{2}\right)}\right)\right.$$

$$\left. + c'\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\cosh\left(s\varpi - \alpha' + \frac{u}{2}\right)} - \sum_1^\infty \frac{1}{\cosh\left(\frac{u}{2} - s\varpi\right)}\right)\right].$$

Se $c = c'$, cioè se i due conduttori sono in comunicazione mediante un filo sottilissimo, avremo:

$$(13)\quad V_0 = c\left[1 + \cosh\frac{u}{2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh\left(\frac{u-\alpha-\alpha'}{2} + (2s+1)\frac{\varpi}{2}\right)}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh\left(\frac{u}{2} + s\varpi\right)}\right)\right].$$

Ora abbiamo:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh\left(z+(2s+1)\frac{\varpi}{2}\right)} = i \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}\left(z+\frac{\pi i}{2}+(2s+1)\frac{\varpi}{2}\right)}$$

$$= - k' i \frac{\operatorname{sn}\left(z+\frac{\pi i}{2}, k\right)}{\operatorname{cn}\left(z+\frac{\pi i}{2}, k\right)} = \frac{k'}{\operatorname{dn}(z, k)},$$

e quindi:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh\left(\frac{u-\alpha-\alpha'}{2}+(2s+1)\frac{\varpi}{2}\right)} = \frac{k'}{\operatorname{dn}\left(\frac{u-\alpha-\alpha'}{2}, k\right)}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh\left(\frac{u}{2}+s\omega\right)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh\left(\frac{u+\varpi}{2}+(2s+1)\frac{\varpi}{2}\right)}$$

$$= \frac{k'}{\operatorname{dn}\left(\frac{u}{2}+\frac{\varpi}{2}, k\right)} = \operatorname{dn}\left(\frac{u}{2}, k\right)$$

e sostituendo nell' equazione (11):

$$(14) \quad V_e' = c\left[1 + \cosh\frac{u}{2}\left(\frac{k'}{\operatorname{dn}\left(\frac{u-\alpha-\alpha'}{2}, k\right)} - \operatorname{dn}\left(\frac{u}{2}, k\right)\right)\right].$$

Per i punti che si trovano sopra la retta che unisce i centri, e che hanno ambedue le sfere da una stessa parte, abbiamo:

$$v = 0.$$

Quindi:

$$(15)\quad V_0 = \operatorname{senh}\frac{u}{2}\left[c\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}\left(s\varpi+\alpha-\frac{u}{2}\right)} - \sum_1^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}\left(s\varpi+\frac{u}{2}\right)}\right)\right.$$

$$\left. + c'\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}\left(s\varpi+\alpha'-\frac{u}{2}\right)} - \sum_1^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{u}{2}-s\varpi\right)}\right)\right],$$

e se $c = c'$:

$$V_0'' = c\left[1+\operatorname{senh}\frac{u}{2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{\alpha+\alpha'-u}{2}+(2s+1)\frac{\varpi}{2}\right)}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{u}{2}+s\varpi\right)}\right)\right]$$

e in modo analogo si trova:

$$(16)\quad V_0'' = c\left\{1-\operatorname{senh}\frac{u}{2}\left(\frac{k'\operatorname{sn}\left(\frac{\alpha+\alpha'-u}{2},k\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{\alpha+\alpha'-u}{2},k\right)} + \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{u}{2},k\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{u}{2},k\right)}\right)\right\}.$$

Denotiamo ora con ρ_1 e con ρ_1' le densità degli strati elettrici nei due punti m ed m' nei quali le sfere (α) ed (α') incontrano la linea dei centri e che si trovano tra questi medesimi centri, e con ρ_2 e ρ_2' le densità negli altri due punti n ed n' dove le sfere (α) ed (α') incontrano la medesima linea. Avremo dalle equazioni (6):

$$\rho_1 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV_0'}{dp}\right)_{u=\alpha} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV_0'}{du}\right)_{u=\alpha}\frac{2\cosh^2\frac{1}{2}\alpha}{a}$$

$$\rho_1' = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV_0'}{dp}\right)_{u=\alpha} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV_0'}{du}\right)_{u=\alpha}\frac{2\cosh^2\frac{1}{2}\alpha'}{a}.$$

Ora la equazione (14) dà:

$$\frac{dV_e'}{du}=\frac{c}{2}\,\mathrm{senh}\,\frac{u}{2}\left(\frac{k'}{\mathrm{dn}\left(\frac{u-\alpha-\alpha'}{2},k\right)}-\mathrm{dn}\left(\frac{u}{2},k\right)\right)$$

$$+\frac{k^2c}{2}\cosh\frac{u}{2}\left(\frac{k'\,\mathrm{cn}\left(\frac{u-\alpha-\alpha'}{2},k\right)\mathrm{sn}\left(\frac{u-\alpha-\alpha'}{2},k\right)}{\mathrm{dn}^2\left(\frac{u-\alpha-\alpha'}{2},k\right)}+\mathrm{cn}\left(\frac{u}{2},k\right)\mathrm{sn}\left(\frac{u}{2},k\right)\right)$$

e quindi:

$$\left(\frac{dV_e'}{du}\right)_{u=\alpha}=k^2\,c\cosh\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}\left(\frac{\alpha}{2},k\right)\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha}{2},k\right)$$

$$\left(\frac{dV_e'}{du}\right)_{u=\alpha'}=k^2\,c\cosh\frac{\alpha'}{2}\,\mathrm{cn}\left(\frac{\alpha'}{2},k\right)\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha'}{2},k\right)$$

e quindi:

$$\rho_1=-\frac{ck^2}{2\pi a}\cosh^3\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}\left(\frac{\alpha}{2},k\right)\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha}{2},k\right)$$

$$\rho_1'=-\frac{ck^2}{2\pi a}\cosh^3\frac{\alpha'}{2}\,\mathrm{cn}\left(\frac{\alpha'}{2},k\right)\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha'}{2},k\right).$$

Le due densità ρ_1 e ρ_1' nei punti m ed m' essendo α ed α' di segno contrario saranno una positiva e l'altra negativa.

Avremo inoltre:

$$\rho_2=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{dV_e''}{du}\right)_{u=\alpha}\frac{\mathrm{senh}^2\frac{\alpha}{2}}{a}$$

$$\rho_2'=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{dV_e''}{du}\right)_{u=\alpha'}\frac{\mathrm{senh}\,\frac{\alpha'}{2}}{a}.$$

Ma dall' equazione (16) si ricava:

$$\frac{dV_e''}{du}=-\frac{c}{2}\cosh\frac{u}{2}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha+\alpha'-u}{2},k\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{\alpha+\alpha'-u}{2},k\right)}+\frac{\mathrm{cn}\left(\frac{u}{2},k\right)}{\mathrm{sn}\left(\frac{u}{2},k\right)}\right)$$

$$+\frac{c}{2}\,\mathrm{senh}\,\frac{u}{2}\left(k'\,\frac{\mathrm{dn}\left(\frac{\alpha+\alpha'-u}{2},k\right)}{\mathrm{cn}^2\left(\frac{\alpha+\alpha'-u}{2},k\right)}+\frac{\mathrm{dn}\left(\frac{\alpha}{2},k\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{\alpha}{2},k\right)}\right),$$

onde:

$$\left(\frac{dV_e''}{du}\right)_{u=\alpha}=c\,\mathrm{senh}\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{\mathrm{dn}\left(\frac{\alpha}{2},k\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{\alpha}{2},k\right)},$$

$$\left(\frac{dV_e''}{du}\right)_{u=\alpha'}=c\,\mathrm{senh}\,\frac{\alpha'}{2}\,\frac{\mathrm{dn}\left(\frac{\alpha'}{2},k\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{\alpha'}{2},k\right)},$$

e quindi:

$$\rho_2=-\frac{c}{2\pi a}\,\mathrm{senh}^3\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{\mathrm{dn}\left(\frac{\alpha}{2},k\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{\alpha}{2},k\right)},$$

$$\rho_2'=-\frac{c}{2\pi a}\,\mathrm{senh}^3\,\frac{\alpha'}{2}\,\frac{\mathrm{dn}\left(\frac{\alpha'}{2},k\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{\alpha'}{2},k\right)}$$

ed anche nei punti n ed n' si hanno elettricità di segno contrario.

Per trattare il caso in cui i due conduttori sono in contatto, converrà sostituire alle coordinate u e v le altre μ e ν determinate dalle equazioni:

$$\mu a = \operatorname{senh} \frac{u}{2}, \qquad \nu a = \operatorname{sen} \frac{v}{2},$$

e quindi porre $a = o$.

Supponiamo la funzione potenziale P delle forze elettriche esterne eguale a zero; allora sopra le superficie di ambedue i conduttori la funzione potenziale V_e relativa ai punti esterni, prende lo stesso valore c. Onde:

$$V_e = c\,(Q + Q')$$

essendo:

$$Q = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{\xi_s}{\xi}, \quad Q' = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{\xi_s'}{\xi},$$

$$\frac{\xi_{2s}}{\xi} = \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 \frac{u}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{v}{2}}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{2s\varpi + 2\alpha - u}{2}\right) + \operatorname{sen}^2 \frac{v}{2}}}$$

$$\frac{\xi_{2s-1}}{\xi} = \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 \frac{u}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{v}{2}}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{2s\varpi + u}{2}\right) + \operatorname{sen}^2 \frac{v}{2}}}.$$

Denotando con β e β' i valori algebrici inversi dei diametri delle due sfere avremo:

$$\frac{\xi_{2s}}{\xi} = \sqrt{\frac{\mu^2 + \nu^2}{(2s\varpi + 2\beta - \mu)^2 + \nu^2}}$$

$$\frac{\xi_{2s-1}}{\xi} = \sqrt{\frac{\mu^2 + \nu^2}{(2s\varpi + \mu)^2 + \nu^2}},$$

essendo:

$$\beta - \beta' = \varpi .$$

Analogamente:

$$\frac{\xi'_{2s}}{\xi} = \sqrt{\frac{\mu^2 + \nu^2}{(2s\varpi - 2\beta' + \mu)^2 + \nu^2}}$$

$$\frac{\xi'_{2s-1}}{\xi} = \sqrt{\frac{\mu^2 + \nu^2}{(\mu - 2s\varpi)^2 + \nu^2}},$$

onde:

$$V_0 = c\left[1 + \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{[\beta + \beta' - \mu + (2s+1)\varpi]^2 + \nu^2}}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(\mu - 2s\varpi)^2 + \nu^2}}\right)\right].$$

Nei punti esterni alle due sfere che si trovano sopra la linea dei centri sarà: $\nu = o$, e quindi:

$$V_0'' = c\left[1 + \mu\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta + \beta' - \mu + (2s+1)\varpi} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu + 2s\varpi}\right)\right].$$

Ora è noto che si ha:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + (2s+1)\varpi} = -\frac{\pi}{2\varpi} \operatorname{tang} \frac{\pi z}{2\varpi}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + 2s\varpi} = \frac{\pi}{2\varpi} \cot \frac{\pi z}{2\varpi}.$$

Quindi:

$$V_0'' = c\left[1 - \frac{\pi\mu}{2(\beta-\beta')}\left(\tang\frac{\pi(\beta+\beta'-\mu)}{2(\beta-\beta')} + \cot\frac{\pi\mu}{2(\beta-\beta')}\right)\right]$$

$$= c\left(1 - \frac{\pi\mu}{2(\beta-\beta')}\;\frac{\cos\dfrac{(\beta+\beta'-2\mu)\pi}{2(\beta-\beta')}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi\mu}{2(\beta-\beta')}\cos\dfrac{\pi(\beta+\beta'-\mu)}{2(\beta-\beta')}}\right).$$

Denotando con ρ_2 e ρ_2' le densità dello strato elettrico nei punti n ed n' dove le due sfere incontrano la linea dei centri, avremo:

$$\rho_2 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV_0''}{d\mu}\right)_{\mu=\beta} = -\frac{\beta c\pi}{8(\beta-\beta')^2\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi\beta}{2(\beta-\beta')}}$$

$$\rho_2' = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV_0''}{d\mu}\right)_{\mu=\beta'} = -\frac{\beta' c\pi}{8(\beta-\beta')^2\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi\beta'}{2(\beta-\beta')}}.$$

XIX.

Determinazione dell'attrazione o ripulsione reciproca di due conduttori di forma sferica elettrizzati.

Il potenziale della elettricità distribuita nello stato di equilibrio sopra due conduttori di forma sferica che si trovano in presenza uno dell'altro con i loro centri distanti tra loro di una lunghezza δ, come abbiamo dimostrato nel §. XVI è dato dalla formula:

$$W = \tfrac{1}{2}(cE + c'E'),$$

ed essendo:

$$E = c\gamma_{11} + c'\gamma_{12},$$

$$E' = c\gamma_{12} + c'\gamma_{22},$$

l' attrazione o ripulsione F tra i due conduttori è data dalla equazione:

$$F = \frac{1}{2}\left(c^2 \frac{d\gamma_{11}}{d\delta} + 2cc' \frac{d\gamma_{12}}{d\delta} + c'^2 \frac{d\gamma_{22}}{d\delta}\right).$$

Ora dall' equazioni (7) del §. XVIII abbiamo:

$$\gamma_{11} = \quad a \sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}(s\varpi + \alpha)},$$

$$\gamma_{12} = -a \sum_1^\infty \frac{1}{\operatorname{senh} s\varpi},$$

$$\gamma_{22} = \quad a \sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}(s\varpi - \alpha')}.$$

Dall'equazioni (1) del §. XVII, si deduce:

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{\cosh \alpha'}{R \operatorname{senh} \varpi} = \frac{R' \cosh \alpha'}{a\delta},$$

$$\frac{d\alpha'}{d\delta} = -\frac{\cosh \alpha}{R' \operatorname{senh} \varpi} = -\frac{R \cosh \alpha}{a\delta},$$

$$\frac{d\varpi}{d\delta} = \frac{\delta}{RR' \operatorname{senh} \varpi} = \frac{1}{a},$$

$$\frac{da}{d\delta} = \frac{\cosh \alpha \cosh \alpha'}{\operatorname{senh} \varpi} = \frac{RR' \cosh \alpha \cosh \alpha'}{a\delta},$$

onde:

$$\frac{d\gamma_{11}}{d\delta} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{RR'\cosh\alpha\cosh\alpha'}{a^2}\gamma_{11} - \sum_0^\infty \frac{(s\delta + R'\cosh\alpha')\cosh(s\varpi + \alpha)}{\operatorname{senh}^2(s\varpi + \alpha)}\right)$$

$$\frac{d\gamma_{12}}{d\delta} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{RR'\cosh\alpha\cosh\alpha'}{a^2}\gamma_{12} + \sum_1^\infty \frac{s\delta\cosh s\varpi}{\operatorname{senh}^2 s\varpi}\right)$$

$$\frac{d\gamma_{22}}{d\delta} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{RR'\cosh\alpha\cosh\alpha'}{a^2}\gamma_{22} - \sum_0^\infty \frac{(s\delta + R\cosh\alpha)\cosh(s\varpi - \alpha')}{\operatorname{senh}(s\varpi - \alpha')}\right)$$

e quindi:

$$F=\frac{1}{\delta}\left(\frac{RR'\cosh\alpha\cosh\alpha'}{a^2}W-\frac{1}{2}\left(c^2\sum_0^\infty\frac{(s\delta+R'\cosh\alpha')\cosh(s\varpi+\alpha)}{\operatorname{senh}^2(s\varpi+\alpha)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2cc'\sum_1^\infty\frac{s\delta\cosh s\varpi}{\operatorname{senh}^2 s\varpi}+c'^2\sum_0^\infty\frac{(s\delta+R\cosh\alpha)\cosh(s\varpi-\alpha')}{\operatorname{senh}^2(s\varpi-\alpha')}\right)\right).$$

Se le sfere hanno raggi eguali, sarà:

$$\alpha'=-\alpha,\quad R=R',\quad 2R\cosh\alpha=2R\cosh\alpha'=\delta,$$

$$W=\frac{c^2+c'^2}{2}\sum_0^\infty\frac{a}{\operatorname{senh}(2s+1)\alpha}-cc'\sum_1^\infty\frac{a}{\operatorname{senh}2s\alpha},$$

e quindi:

$$F=\frac{1}{4}(c^2+c'^2)\sum_1^\infty\frac{\coth\alpha-(2s+1)\coth(2s+1)\alpha}{\operatorname{senh}(2s+1)\alpha}-\frac{1}{2}cc'\sum_1^\infty\frac{\coth\alpha-2s\coth 2s\alpha}{\operatorname{senh}2s\alpha}$$

e trascurando le potenze di $\frac{R}{\delta}$ superiori alla 2.ª:

$$F=\frac{cc'R^2}{\delta^2},$$

onde: due sfere eguali elettrizzate che si trovano a una distanza molto maggiore dei loro raggi si attraggono o si respingono secondo che le funzioni potenziali sopra le due sfere hanno segni differenti o eguali, e l' azione è proporzionale direttamente ai valori delle funzioni potenziali, alle superficie delle sfere e in ragione inversa del quadrato della loro distanza.

Se poi:

$$c=c',$$

sarà:

$$F=\frac{c^2}{2}\Sigma(-1)^n\frac{n\coth n\alpha-\coth\alpha}{\operatorname{senh}n\alpha}.$$

XX.

Bottiglia di Leyda.

Sopra due superficie A e B di forma qualunque separate tra loro da uno strato sottilissimo di materia coibente siano distesi due strati di materia conduttrice. Lo strato che è a contatto colla superficie A sia posto in comunicazione con un corpo conduttore C, e quello che è a contatto colla superficie B sia posto in comunicazione con un corpo conduttore C', e i conduttori C e C' abbiano cariche differenti di elettricità. Denotiamo con V la funzione potenziale di tutta l'elettricità che si trova allo stato di equilibrio sui conduttori C e C' e sopra i due strati di materia conduttrice in contatto colle superficie A e B. Nel conduttore C, e nello strato che è in comunicazione con C avremo:

$$V = c.$$

Nel conduttore C' e nello strato che è in comunicazione con C', sarà:

$$V = c',$$

essendo c e c' due costanti dipendenti dalle cariche elettriche dalla posizione e dalla forma dei conduttori e dei due strati.

Denotiamo con θ le lunghezze piccolissime ma variabili delle porzioni di normali alla superficie A comprese tra A e B, e con θ' le lunghezze delle porzioni di normali alla superficie B comprese tra B ed A.

Se prendiamo per assi coordinati la normale p a un punto m della superficie A e due rette tra loro ortogonali sul piano tangente ad A nel punto m, che passano per m, V sarà una funzione di p e delle altre due coordinate, ed è

chiaro che nel punto n dove la normale in m alla superficie A incontra la superficie B, avremo:

$$V = c' = c + \theta \frac{dV}{dp} + \frac{\theta^2}{2} \frac{d^2V}{dp^2},$$

trascurando le potenze di θ superiori alla seconda.

Analogamente avremo:

$$c = c' + \theta' \frac{dV}{dp'} + \frac{\theta'^2}{2} \frac{d^2V}{dp'^2}.$$

Denotando con ρ e ρ' le densità degli strati elettrici in contatto colla superficie A e colla superficie B, abbiamo:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dp}, \quad \rho' = -\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dp'},$$

e trascurando le quantità dell' ordine θ:

$$\frac{d^2V}{dp^2} = \frac{d^2V}{dp'^2}.$$

Onde prendendo eguali θ e θ' avremo:

$$(1) \qquad \begin{cases} c' - c = -4\pi\rho\theta + \dfrac{\theta^2}{2} \dfrac{d^2V}{dp^2} \\ c - c' = -4\pi\rho'\theta + \dfrac{\theta^2}{2} \dfrac{d^2V}{dp^2} \end{cases}$$

La superficie A è una superficie di livello rispetto alla funzione V; quindi la sua equazione sarà della forma:

$$f(x, y, z) = \rho,$$

essendo V funzione della sola ρ. Avremo dunque:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{dV}{d\rho}\sqrt{\Delta\rho},$$

$$\frac{d^2V}{dp^2} = \left(d\frac{\sqrt{\Delta\rho}\frac{dV}{d\rho}}{dx}\frac{d\rho}{dx} + d\frac{\sqrt{\Delta\rho}\frac{dV}{d\rho}}{dy}\frac{d\rho}{dy} + d\frac{\sqrt{\Delta\rho}\frac{dV}{d\rho}}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right)\frac{1}{\sqrt{\Delta\rho}}$$

$$= \Delta\rho\frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{d\Delta\rho}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\Delta\rho}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{d\Delta\rho}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right)}{\Delta\rho}\frac{dV}{d\rho}.$$

Ma abbiamo:

$$\Delta^2 V = \Delta\rho\frac{d^2V}{d\rho} + \frac{dV}{d\rho}\Delta^2\rho = o,$$

onde:

$$\frac{d^2V}{dp^2} = -\frac{dV}{d\rho}\left(\frac{\Delta^2\rho\,\Delta\rho - \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\Delta\rho}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\Delta\rho}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\Delta\rho}{dz}\right)}{\Delta\rho}\right).$$

Ora la equazione:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2\rho}{dx^2} - \lambda, & \frac{d^2\rho}{dx\,dy} & \frac{d^2\rho}{dx\,dz} & \frac{d\rho}{dx} \\ \frac{d^2\rho}{dx\,dy} & \frac{d^2\rho}{dy^2} - \lambda, & \frac{d^2\rho}{dy\,dz} & \frac{d\rho}{dy} \\ \frac{d^2\rho}{dz\,dx} & \frac{d^2\rho}{dz\,dy} & \frac{d^2\rho}{dz^2} - \lambda, & \frac{d\rho}{dz} \\ \frac{d\rho}{dx} & \frac{d\rho}{dy} & \frac{d\rho}{dz} & o \end{vmatrix} = o$$

ha per radici le due quantità:

$$\frac{\sqrt{\Delta\rho}}{R} \qquad \frac{\sqrt{\Delta\rho}}{R'},$$

dove R ed R' denotano i raggi di massima e minima curvatura della superficie A. Avremo dunque:

$$\frac{\Delta\rho\,\Delta^2\rho - \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\Delta\rho}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\Delta\rho}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\Delta\rho}{dz}\right)}{\Delta\rho} = \sqrt{\Delta\rho}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

e quindi:

$$\frac{d^2V}{dp^2} = -\frac{dV}{dp}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = 4\pi\rho\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Sostituendo nelle equazioni (1), si ottiene:

$$c' - c = -4\pi\rho\theta + 2\pi\rho\theta^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

$$c - c' = -4\pi\rho'\theta + 2\pi\rho\theta^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Sommando si ha:

$$\rho' = -\rho\left[1 - \theta\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right]$$

e sottraendo:

$$c' - c = 2\pi(\rho' - \rho)\theta. \tag{2}$$

Se denotiamo con du e dv gli elementi delle due linee di curvatura della superficie A in un punto m, l' elemento $d\sigma$ di questa superficie sarà:

$$d\sigma = du\,dv,$$

l' elemento dalla superficie B determinato dal prolungamento delle normali ad A, sarà:

$$d\sigma' = du'\ dv',$$

e avremo:

$$\frac{du}{R} = \frac{du'}{R+\theta}, \quad \frac{dv}{R'} = \frac{dv'}{R'+\theta},$$

onde:

$$(3) \quad d\sigma' = du\,dv\left(1+\frac{\theta}{R}\right)\left(1+\frac{\theta}{R'}\right) = d\sigma\left[1+\theta\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right].$$

Avremo dunque:

$$\rho'\,d\sigma' = -\rho\,d\sigma\left[1-\theta^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)^2\right],$$

e quindi trascurando le potenze seconde di θ:

$$(4) \qquad \rho'\,d\sigma' = -\rho\,d\sigma$$

cioè il seguente teorema:

Se prendiamo una porzione a *di superficie* A *limitata da una curva chiusa, e la corrispondente porzione* b *di superficie* B *limitata dalla curva tracciata sopra* B *dai prolungamenti delle normali ai punti di* a, *la somma algebrica delle quantità di elettricità che si trovano sopra* a *e sopra* b', *è eguale a zero.*

Se i contorni delle due armature si corrisponderanno in modo che le normali ad A nei punti del contorno dell'armatura di A prolungate fino alla superficie B determinino il contorno dell'armatura di questa superficie, e denotiamo con E ed E' rispettivamente le quantità di elettricità o cariche elettriche delle due armature di A e di B, avremo approssimativamente:

$$E' = -E.$$

Moltiplicando per l'elemento $d\sigma$ della superficie A l'equazione (2) si ottiene:

$$\rho' d\sigma - \rho d\sigma = \frac{c - c}{2\pi\theta} d\sigma ;$$

ma dalle equazioni (3) si deduce:

$$\rho' d\sigma = -\rho d\sigma \left[1 - \theta \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right]$$

dove si sono trascurate le potenze di θ superiori alla prima. Quindi trascurando la potenza prima di faccia alla potenza negativa di θ, abbiamo:

$$-\int \rho d\sigma = -E = \frac{c' - c}{2\pi} \int \frac{d\sigma}{\theta} = E' .$$

Se prendiamo uniforme la grossezza θ dello strato coibente interposto tra le due armature, θ sarà una costante, e denotando con S la superficie dell'armatura di A, avremo:

$$(5) \quad \begin{aligned} E &= c \frac{S}{2\pi\theta} - c' \frac{S}{2\pi\theta} , \\ E' &= -c \frac{S}{2\pi\theta} + c' \frac{S}{2\pi\theta} . \end{aligned}$$

Rammentando ciò che esponemmo alla fine del §. XIII, abbiamo da queste equazioni i seguenti teoremi, i quali sono veri nel grado di approssimazione del calcolo che abbiamo fatto:

1.° *Le capacità elettriche delle due armature di una bottiglia di Leyda sono eguali e direttamente proporzionali alla superficie dell' armatura e inversamente proporzionali alla grossezza dello strato coibente interposto.*

2.° *La carica elettrica è proporzionale alla capacità elettrica delle armature e alla differenza dei valori della fun-*

zione potenziale sopra i due conduttori mediante i quali si è caricata la bottiglia.

Il potenziale delle due armature, cioè la funzione le cui derivate rispetto alle coordinate rettilinee e angolari che danno la posizione dell' una relativamente all' altra, esprimono le loro azioni reciproche, sarà:

$$P = -\tfrac{1}{2}(c\,E + c'\,E'),$$

che colla sostituzione dei valori di E e di E' diviene:

$$P = -\frac{(c'-c)^2\,S}{2\,\pi\,\theta}.$$

Ora se scarichiamo la bottiglia, cioè se stabiliamo la comunicazione tra le due armature, c' diviene eguale a c e quindi:

$$P = o.$$

Onde la scarica aumenta il potenziale della quantità:

$$\frac{(c'-c)^2\,S}{2\,\pi\,\theta},$$

e per quello che abbiamo dimostrato nel §. IX, avremo il seguente teorema:

Gli effetti meccanici della scarica di una bottiglia di Leyda sono direttamente proporzionali alla superficie dell' armatura, al quadrato della differenza dei valori della funzione potenziale sopra i due serbatoi coi quali sono state poste in comunicazione le due armature per caricarla, e inversamente proporzionali alla grossezza dello strato coibente interposto tra le due armature.

Se la scarica non produce lavoro meccanico, nè movimento, tutto l' effetto meccanico si ridurrà a produzione di calore, e la quantità di questo sarà data dalla formula:

$$C = \frac{(c'-c)^2\,S}{2\,\pi\,\theta\,I},$$

denotando con I l' equivalente meccanico del calore.

Siano ora n bottiglie di Leyda tutte eguali tra loro, e distinguiamo con indici posti in basso alle lettere che le esprimono le quantità relative alle differenti bottiglie. Supponiamo che l'armatura A_1 della prima bottiglia sia in comunicazione col conduttore della macchina elettrica sopra la quale la funzione potenziale abbia il valore c'; l'armatura B_1 della prima bottiglia sia in comunicazione coll'armatura A_2 della seconda e denotiamo con c_1 il valore della funzione potenziale sopra A_2 e B_1: l'armatura B_2 sia in comunicazione coll'armatura A_3 della terza bottiglia e sia c_2 il valore della funzione potenziale sopra A_3 e B_2 e così di seguito; finalmente l'armatura B_n sia in comunicazione con un serbatoio sopra il quale la funzione potenziale ha il valore c. Siano rispettivamente: ρ_1', ρ_2', ρ_3', ... ρ_n' le densità delle elettricità sopra le armature: A_1, A_2, A_3 ... A_n; e ρ_1, ρ_2, ρ_3 ... ρ_n le densità sopra le armature: B_1, B_2 ... B_n. Trascurando le potenze di θ superiori alla prima, dall'equazioni (1) si ricava:

$$\rho_1' = \frac{c' - c_1}{4\pi\theta} \quad , \quad \rho_1 = \frac{c_1 - c'}{4\pi\theta} \; ,$$

$$\rho_2' = \frac{c_1 - c_2}{4\pi\theta} \quad , \quad \rho_2 = \frac{c_2 - c_1}{4\pi\theta} \; ,$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\rho_n' = \frac{c_{n-1} - c}{4\pi\theta} \quad , \quad \rho_n = \frac{c - c_{n-1}}{4\pi\theta} \; .$$

Onde denotando con E_1' E_2' ... E_n' le cariche dell'armature: A_1, A_2 ... A_n e con E_1, E_2 ... E_n quelle delle armature: B_1 B_2 ... B_n, avremo:

$$E_1' = \frac{c' - c}{4\pi\theta} S \quad , \quad E_1 = \frac{c_1 - c'}{4\pi\theta} S,$$

$$E_2' = \frac{c_1 - c_2}{4\pi\theta} S \quad , \quad E_2 = \frac{c_2 - c_1}{4\pi\theta} S,$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$E_n' = \frac{c_{n-1} - c}{4\pi\theta} S \quad , \quad E_n = \frac{c - c_{n-1}}{4\pi\theta} S .$$

Sommando abbiamo:

$$E_1' + E_2' + \ldots + E_n' = -(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) = \frac{c' - c}{4\pi} \frac{S}{\theta}.$$

Quindi abbiamo il seguente teorema osservato da *Green*.

La carica elettrica di una serie di bottiglie caricate per cascata è eguale alla carica che si otterrebbe nelle medesime circostanze da una sola bottiglia.

Il potenziale della serie di bottiglie caricate per cascata sarà:

$$W = -\tfrac{1}{2}(c' E_1' + c_1 E_2' + c_2 E_3' + \ldots + c E_n'$$

$$+ c_1 E_1 + c_2 E_2 + \ldots c_{n-1} E_n),$$

e sostituendo i valori (6) avremo:

$$W = -\frac{S}{4\pi\theta}\Big((c' - c_1)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (c_2 - c_3)^2 + \ldots + (c_{n-1} - c)^2\Big).$$

Poichè le E_1' E_2' .. E_n' hanno tutte lo stesso segno, le quantità $c' - c_1$, $c_1 - c_2$ ... sono tutte positive o tutte negative, e la loro somma è eguale a $c' - c$. Quindi la quantità tra parentesi è $< (c' - c)^2$, ossia il potenziale delle n bottiglie caricate per cascata è minore in valore assoluto del potenziale di una sola bottiglia caricata colla stessa macchina elettrica e abbiamo il seguente teorema:

Gli effetti meccanici che si ottengono dalla scarica di più bottiglie di Leyda caricate per cascata sono minori di quelli che si sarebbero ottenuti dalla scarica di una sola bottiglia caricata colla stessa macchina elettrica e sempre diminuiscono crescendo il numero delle bottiglie.

XXI.

Determinazione sperimentale dei valori della funzione potenziale di un sistema di corpi elettrizzati.

Sia V la funzione potenziale di un sistema di corpi qualunque elettrizzati posti in presenza uno degli altri, ed S lo spazio connesso esterno a tutti questi corpi. La funzione V avrà valori costanti sopra i corpi conduttori del sistema e valori determinati, ma che potranno essere variabili da punto a punto nei corpi coibenti del sistema e queste condizioni servono alla sua determinazione in tutto lo spazio S. Dato il metodo per determinare V analiticamente, vediamo come si possano verificare esperimentalmente i valori di questa funzione. Sia m un punto dello spazio S, ed s una sfera di materia conduttrice di raggio a e allo stato naturale, che porremo col centro in m. Se le distanze di m dai corpi elettrizzati del sistema, e il raggio a della sfera s sono tali che l'azione della elettricità di s non possa rendersi sensibile sopra l'elettricità dei corpi conduttori del sistema, la elettricità sopra la superficie della sfera s sotto l'azione delle forze elettriche del sistema vi si distribuirà, come abbiamo dimostrato nel §. XV, in modo che la densità sarà data dalla formula:

$$4\pi\rho = \frac{c - V}{a} - 2\frac{dV}{dr},$$

dove r denota la distanza del punto che si considera dal centro di s, e per V e $\frac{dV}{dr}$ si debbono prendere i valori che avrebbero queste funzioni nel punto della superficie s nel quale si vuole determinare la densità, se non vi fosse la sfera s.

Finchè la sfera s rimane isolata, la sua carica elettrica Q sarà eguale a zero, cioè le elettricità positive e negative

che si troveranno sopra la medesima saranno eguali, e avremo:

$$\int \rho \, ds = o = ca - \frac{1}{4\pi a}\int V \, ds - \frac{1}{2\pi a}\int \frac{dV}{dr} \, ds .$$

Ora per il teorema 1.° del §. IV, abbiamo:

$$\int \frac{dV}{dr} \, ds = o ;$$

quindi sarà:

$$c = \frac{1}{4\pi a^2} \int V \, ds ,$$

e avremo il seguente:

Teorema 1.° *In una sfera isolata s sotto l'azione di forze elettriche di un sistema qualunque, nel caso che si possa trascurare l'azione che l'elettricità che si trova sopra di lei esercita sopra quella degli altri corpi conduttori del sistema, l'elettricità si distribuisce in modo che la funzione potenziale del sistema sopra la superficie di s sia eguale al valor medio che avrebbe sopra i punti che occupa la superficie stessa quando la sfera s non vi si trovasse.*

Prendiamo ora un filo conduttore e poniamo la sfera s in comunicazione col suolo; una porzione di elettricità dalla superficie s andrà nel suolo, e la rimanente si distribuirà sopra s e sopra il filo conduttore in modo che la funzione potenziale vi sia eguale a zero. Questo durerà finchè il filo conduttore rimane unito ad s ed al suolo; ma quando si toglie la comunicazione del filo colla sfera e si allontana il filo, l'elettricità della sfera s non essendo più sotto l'azione di quella che si trovava sul filo, prenderà un'altra posizione di equilibrio, e il valore della funzione potenziale potrà variare e tornare ad essere differente da zero. Se però il filo sarà tanto sottile che l'azione della elettricità che potrà trovarsi sopra il medesimo in vicinanza della sfera s sia trascura-

bile, tolto il filo la elettricità della sfera s conserverà la medesima distribuzione, e quindi la funzione potenziale continuerà ad esservi eguale a zero. Dopo aver dunque posta la sfera s in comunicazione col suolo mediante un filo sottilissimo, ed aver poi tolta la comunicazione, avremo $c = o$ e quindi la densità sopra la superficie di s sarà data dalla formula:

$$4 \pi \rho = - \frac{V}{a} - 2 \frac{dV}{dr} ;$$

e quindi denotando con Q la quantità di elettricità rimasta sopra la sfera, avremo:

$$(1) \qquad Q = - \frac{1}{4 \pi a} \int V \, ds = - a \int \frac{V \, dz}{4 \pi a^2} .$$

Onde si deduce il seguente:

Teorema 2.° *La quantità di elettricità che si troverà sopra una sfera conduttrice col centro in un punto* m, *dopo averla posta in comunicazione col suolo mediante un filo sottilissimo, trascurando l'azione che essa potrà esercitare sopra i corpi conduttori che la circondano, sarà eguale al raggio di questa sfera moltiplicato per il valore medio che la funzione potenziale della elettricità dei corpi che la circondano preso negativamente, prenderebbe nei punti occupati dalla sua superficie quando essa non vi si trovasse.*

Se il raggio di questa sfera sarà piccolissimo, questi valori della funzione potenziale sopra la sua superficie differiranno insensibilmente da quello che essa ha nel centro della sfera e avremo, denotando con V_m questo valore:

$$Q = - a V_m ,$$

e quindi:

Teorema 3.° *La quantità di elettricità di una sfera piccolissima di materia conduttrice posta col centro in un punto* m, *dopo che sarà stata in comunicazione col suolo mediante un filo sottilissimo, sarà eguale al prodotto preso negativa-*

mente del raggio della sfera moltiplicato per il valore che la funzione potenziale della elettricità dei corpi che la circondano avrebbe nel punto m *se essa non vi si trovasse.*

Con una sfera di prova si determinano dunque i valori della funzione potenziale nei differenti punti di uno spazio in cui sono immersi corpi elettrizzati, purchè questi punti non si trovino troppo vicini alle superficie di quelli tra questi corpi che son conduttori.

Se scandagliamo colla sfera di prova un punto dello spazio interno ad un conduttore, per esempio un punto dello spazio racchiuso da una superficie sferica, troviamo sopra la sfera di prova una carica elettrica proporzionale al valore della funzione potenziale sopra la superficie della sfera, benchè in quel punto l'azione elettrica sia nulla, perchè la funzione potenziale ha in esso il medesimo valore che ha alla superficie della sfera.

Ora se invece di far comunicare col suolo la piccola sfera s che ha il centro in un punto m, si facesse comunicare mediante il solito filo sottilissimo con uno dei conduttori sopra il quale la funzione potenziale ha il valore β, dopo tolta la comunicazione, avremo sempre:

$$c = \beta ;$$

e quindi la densità sarebbe data dalla formula:

$$4\pi\rho = \frac{\beta - V}{a} - 2\frac{dV}{dr}.$$

Onde denotando con Q' la quantità di elettricità che si troverà sopra s, avremo:

$$Q' = \beta a - a\int \frac{V\,ds}{4\pi a^2}, \tag{2}$$

e sottraendo da questa la equazione (1), si otterrà:

$$\beta = \frac{Q' - Q}{a},$$

dalla quale si deduce il seguente processo sperimentale per determinare il valore della funzione potenziale sopra un conduttore:

Si pone una sfera di prova in un punto m *non troppo vicino al conduttore e dopo averla posta in comunicazione col suolo se ne determina la carica* Q; *poi si scarica la sfera di prova e si ripone col centro nello stesso punto* m, *si pone in comunicazione col conduttore e poi se ne determina la carica* Q'; *il valore della funzione potenziale sul conduttore sarà* $\frac{Q'-Q}{a}$.

La proprietà della sfera di prova di dare il valore della funzione potenziale nei punti dello spazio esterno ai corpi elettrizzati, e non vicini a quelli tra questi che sono conduttori non so se sia stata osservata da altri, ma certamente non è nota a molti fisici, i quali ritengono che dia invece l'azione elettrica, e questo può dar luogo a molti errori. Facciamone l'applicazione ad una esperienza di *Faraday*. Sia dato un corpo coibente K simmetrico, e simmetricamente elettrizzato intorno ad un asse X, e sia V la funzione potenziale del medesimo; poniamo al di sopra di K col centro sull'asse X una sfera S di raggio a, e facciamola comunicare col suolo mediante un filo sottilissimo, e dopo scandagliamo colla sfera di prova *s* diversi punti dell'asse X dalla parte della sfera S opposta a quella in cui è posto K; si trova che le cariche della sfera di prova vanno crescendo sino a un certo punto dell'asse, al di là del quale decrescono indefinitamente. Ora è facile a dimostrarsi che la funzione potenziale della elettricità di S e di K cresce sino a un certo punto dove acquista un valore massimo e poi decresce indefinitamente, mentre l'azione elettrica in questo punto è nulla, e se prima era attrattiva dopo è ripulsiva e viceversa.

Infatti abbiamo dal §. XV. che la funzione potenziale della elettricità della sfera S, dopo che è stata in comunicazione col suolo, sopra un punto m dell'asse X distante dal centro della sfera di una lunghezza $x > a$, sarà:

$$-\frac{a}{x}\,V\left(\frac{a^2}{x}\right),$$

essendo $V\left(\frac{a^2}{x}\right)$ il valore della funzione potenziale nel punto reciproco ad m; quindi la funzione potenziale delle elettricità di K e di S sarà:

$$P = -\frac{a}{x} V\left(\frac{a^2}{x}\right) + V(x).$$

Ora questa funzione è nulla per $x = a$, e per $x = \infty$ ed è continua, dunque deve avere un massimo, il quale si troverà ponendo:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{a}{x^2} V\left(\frac{a^2}{x}\right) + \frac{a^3}{x^3} V'\left(\frac{a^2}{x}\right) + V'(x) = o.$$

Quindi in questo punto l'azione elettrica sarà nulla e passerà dal positivo al negativo, o dal negativo al positivo, cioè dall'essere attrattiva all'essere ripulsiva o viceversa.

Supponiamo che il corpo coibente K sia una sfera elettrizzata uniformemente col centro sull'asse X, avremo:

$$V = \frac{C}{x + z},$$

essendo z la distanza tra i centri delle due sfere; quindi:

$$P = -\frac{C a}{z x + a^2} + \frac{C}{x + z},$$

e denotando con μ la distanza dal centro della sfera S del punto dell'asse X dove la funzione potenziale P ha il valore massimo, abbiamo:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{x=\mu} = C\left(\frac{a z}{(\mu z + a^2)^2} - \frac{1}{(\mu + z)^2}\right) = o,$$

onde:

$$\mu = z\left(1 + \sqrt{\frac{a}{z}} + \frac{a}{z}\right).$$

Rimane ora a considerare il caso in cui la sfera di prova sia posta a contatto con un conduttore elettrizzato. Quando si trova in punti sufficientemente lontani dai conduttori elettrizzati si può ammettere che la elettricità indotta in essa non alteri il valore della funzione potenziale dei corpi che la circondano nei punti dove essa si trova, ma questo valore non può ammettersi che resti inalterato dall' azione dell' elettricità comunicatale, sopra le parti del conduttore che le sono prossime, e quindi la determinazione della sua carica è un problema più complicato. Limitiamoci a trattarlo nel caso più semplice.

Sia dato un conduttore di forma sferica S elettrizzato e isolato, e sia R il raggio di S. Prendiamo la sfera di prova s allo stato naturale e sia il suo raggio a molto piccolo rispetto a R. Sia ρ la densità elettrica costante sopra la superficie S, il valore della funzione potenziale sopra S sarà:

$$c = 4\pi R \rho.$$

Dopo che avremo portato la sfera di prova a contatto con S, a cagione della piccolezza di s rispetto ad S, la funzione potenziale delle due sfere avrà sopra la superficie di ambedue il valore c, e per quello che abbiamo esposto alla fine del §. XVIII, nello spazio esterno alle due sfere sarà data dalla formula:

$$V_e = c\left[1 + \sqrt{\mu^2+\nu^2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(\beta+\beta'-\mu+[2s+1]\varpi)^2+\nu^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\mu-2s\varpi)^2+\nu^2}}\right)\right],$$

essendo:

$$\beta = \frac{1}{2a}, \quad \beta' = -\frac{1}{2R}.$$

Se denotiamo con E la quantità di elettricità che si troverà sopra la sfera di prova, avremo:

$$E = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV_0}{dr}\, d\sigma\,.$$

Osserviamo ora che la distanza δ di due punti: uno di coordinate (μ, ν), l'altro di coordinate (β, γ), è data da:

$$\delta = \frac{\sqrt{(\mu-\beta)^2 + (\nu-\gamma)^2}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}\,\sqrt{\beta^2+\nu^2}}\,,$$

e che quindi:

$$\lim_{\substack{\mu=\beta\\ \nu=\gamma}} \frac{\delta\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\sqrt{(\mu^2-\beta)^2+(\nu-\gamma)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\,.$$

Osserviamo inoltre che nello spazio racchiuso dalla sfera di prova la funzione V_0 non diviene infinita altro che per i punti che hanno le coordinate:

$$\mu = 2s\beta - 2s\beta'\,,\quad \nu = o\,;$$

$$\mu = (2s+2)\beta - 2s\beta'\,,\quad \nu = o\,;$$

ed applicando il teorema 2° del §. IV, avremo:

$$E = -\frac{c\beta'}{2\beta^2}\sum_1^\infty \frac{1}{s\left(1-\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(s-\frac{(s-1)\beta'}{\beta}\right)}\,.$$

Quindi trascurando le potenze di $\frac{1}{\beta}$ superiori alla seconda avremo:

$$E = -\frac{c\beta'}{2\beta^2}\sum_1^\infty \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{12}\frac{c\beta'}{\beta^2}\,,$$

e sostituendo i valori di α, β' e β:

$$E = \frac{\pi^2}{6} \cdot \pi r^2 \rho$$

Onde abbiamo il seguente teorema:

La carica elettrica che prende una piccola sfera di prova s *allo stato naturale, quando è posta a contatto con una sfera* S *isolata elettrizzata, è proporzionale direttamente alla propria superficie e alla densità dell' elettricità della sfera* S.

Se stacchiamo la sfera di prova dalla sfera S, e la sottragghiamo alla sua influenza, l' elettricità E che si trovava sopra la medesima vi si distribuirà uniformemente, e denotandone la densità con ρ', avremo:

$$\rho' = \frac{E}{\pi r^2} = \frac{\pi^2}{6} \rho$$

e abbiamo l' altro teorema:

La densità sopra una piccola sfera di prova s *dopo che è stata a contatto con un conduttore sferico* S, *sarà eguale alla densità della elettricità sopra la sfera* S *moltiplicata per* $\frac{\pi^2}{6}$.

FINE